الجامعة السورية الخاصة
SYRIAN PRIVATE UNIVERSITY

كلية هندسة البترول
Faculty of petroleum engineering

الهندسة الوصفية

الجزء العملي

استاذ المقرر
د. مفيد العفيف

العام الدراسي 2017 – 2018

الفصل الاوّل

((النقطة الهندسية وتمثيلها))

أولا ـ أمثلة تطبيقية :

مثال ـ ١ ـ حدد في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي الفراغي النقطتين A و B المحددتين باحداثياتهما :

A(13,5 و 16,5 و 20) و B (33,5 و 26,5 - و 13,5 -)

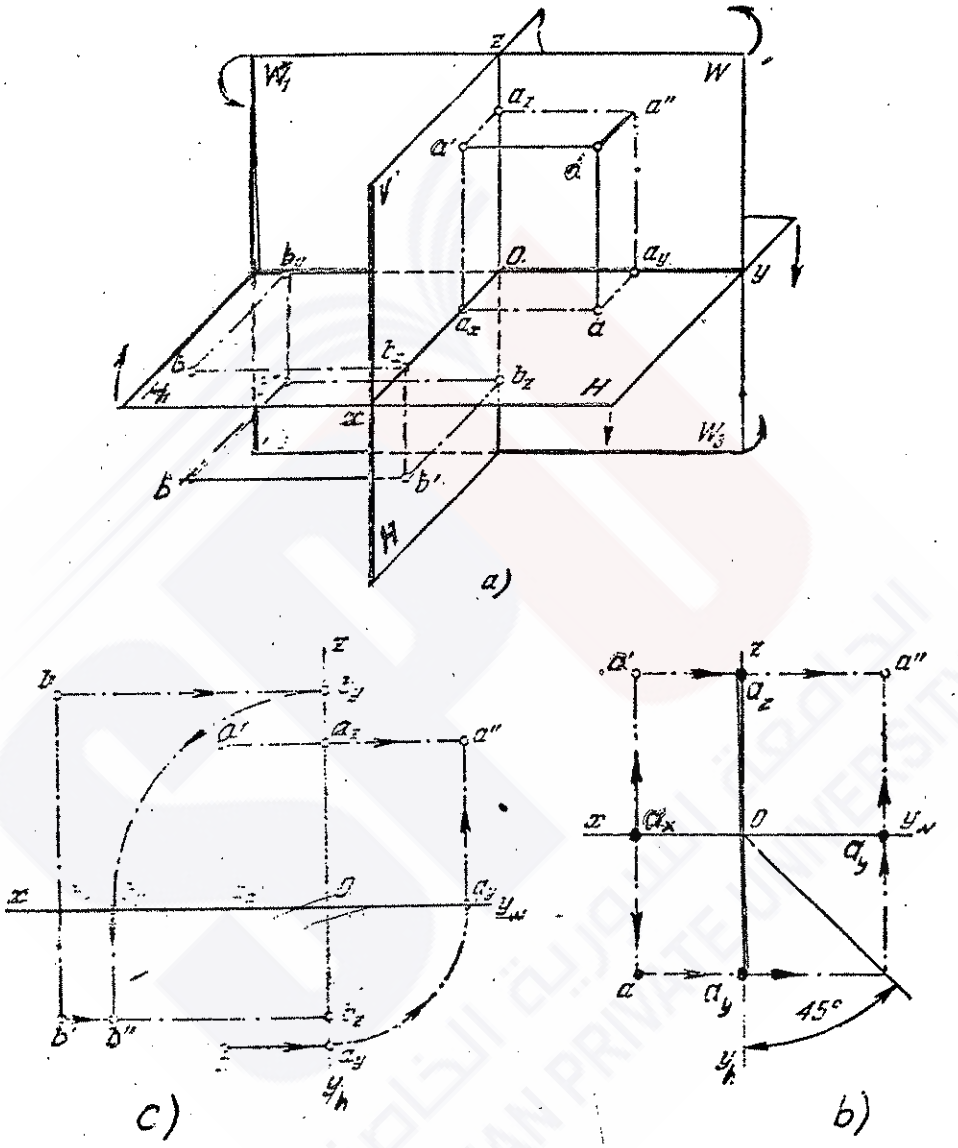
ملاحظة عامة : احداثيات النقطة تعني بُعد النقطة عن مستويات الاسقاط ، ولهذا فان التعبير (13,5 و 16,5 و 20) A يعني أن النقطة A تكون على بُعد X = 13,5 عن مستوي الاسقاط الجانبي وعلى بُعد y = 16,5 عن مستوي الاسقاط الأمامي وعلى بعد Z = 20 عن مستوي الاسقاط الأفقي .

الحل : نحدد قبل كل شيء مقياس الرسم ونرسم محاور الاحداثيات OX و OY و OZ .

آ ـ اذا رسمنا التعبير الفراغي لوضع النقطتين A و B نجد أن النقطة A تقع في الثمن الأول من تقسيمات الفراغ بواسطة مستويات الاسقاط بينما تقع النقطة B في الثمن الثالث منها (الشكل ١ آ) .

لذلك نأخذ من بدء الاحداثيات O على المحور OX قيمة X لنقطة A (أي 13,5) تتحدد النقطة a_x (الشكل ـ أ ب جـ ـ) ومنها نقيم خط تداع يعامد خط الأرض OX ونأخذ عليه فوق خط الأرض قيمة Z

للنقطة A(20) فنحدد a' المسقط الامامي للنقطة A وناخذ عليه تحت



شكل رقم (١)

خط الأرض قيمة y للنقطة A(16,5) فنحدد a المسقط الأفـــــــقي للنقطة A .

ب ـ المسقط الجانبي "a والمسقط الأمامي 'a للنقطة يقعان في مستـــو

أفقي واحد مع النقطة A (الشكل ـ ١ آ ـ)،ولهذا فانهما يقعـــــان في التعبير المستوي الاسقاطي على خط تداع واحد يعامد محور OZ ويقطعه في النقطة a_z (الشكل ـ ١ ب،جـ ـ) ٠

جـ ـ المسقط الجانبي "a والمسقط الأفقي a للنقطة A يقعان في مستـــو شاقولي واحد مع النقطة A (الشكل ١ آ) يقطع محـــــور OY في النقطة a_y وعند تدوير مستوي الاسقاط الجانبي W والأفقي H لوضعهما في مستو واحد مع مستوي الاسقاط V (أي عند الانتقال الى التعبيـــر الاسقاطي المستوي) فان المحور OY ،والنقاط الواقعة عليه،ينشطر الى نقطتين: أفقي OY_w (على امتداد OX) وشاقولي OY_h (على امتداد OZ) وبذلك تنشطر نقطة a_y الى نقطتين : تقع الأولـى على OY_h وتقـــع الثانية على OY_w ٠

د ـ على هذا الأساس لإيجاد المسقط الجانبي "a للنقطة A نمرر من a' مستقيما يعامد OZ ويقطعه في النقطة Z ونمرر من a مستقيمـــا يعامد OY_h ويقطعه في a_y ٠

هـ ـ نحدد الشطر الثاني من a_y الواقع على المحور OY_w باحدى الطريقتين التاليتين ٠

١ـ نرسم منصف الزاوية القائمة Y_hOY_w (الشكل ـ ١ ب ـ) ونمد خط التداعي المرسوم من النقطة a عموديا على OY_h حتى يقطع منصف الزاوية ٠ نقيم من نقطة التقاطع هذه عمودا على OY_w فيقطعه في النقطة a_y المطلوبة ٠

٢ـ من بدء الاحداثيات 0 نرسم قوسا بنصف قطر يساوي المقطع Oa_y على محور OY_h باتجاه OY_w فيقطعه في النقطة a_y ٠

و ـ من نقطة a_y على OY_w نقيم عمودا على هذا المحور فيقطع خط التداعي المرسوم من النقطة 'a ويعامد OZ في النقطة "a المسقط الجانبي المطلوب (الشكل ١ ب ، جـ) .

ز ـ لتحديد مساقط النقطة B نقوم بالخطوات السابقة ذاتها ولكن مع الملاحظات التالية :

١ـ من احداثيات النقطة B المعطاة ومن الشكل (١ أ) نلاحظ أن النقطة B تقع في الثمن الثالث من تقسيمات الفراغ .

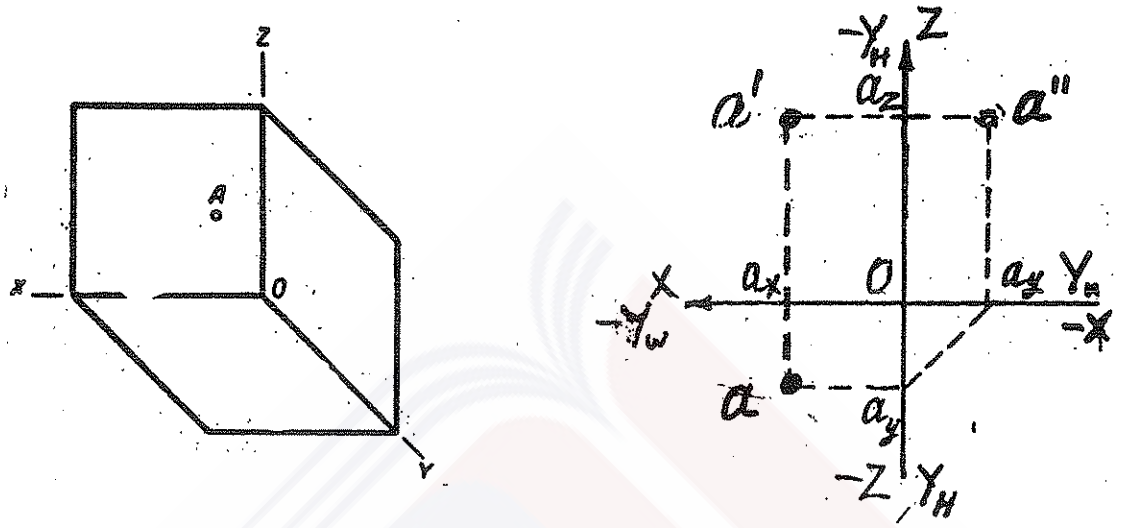
٢ـ لذلك قيمة Z(13,5) تؤخذ تحت خط الأرض وقيمة Y(25,5) تؤخذ فوق خط الأرض (الشكل ١ جـ) .

٣ـ ننقل النقطة a_y الواقعة على OZ (امتداد OY_h) الى المحور OX (امتداد OY_w) ، بتعبير آخر ننقل النقطة a_y من الشطر السالب للمحور OY_h الى الشطر السالب للمحور OY_w .

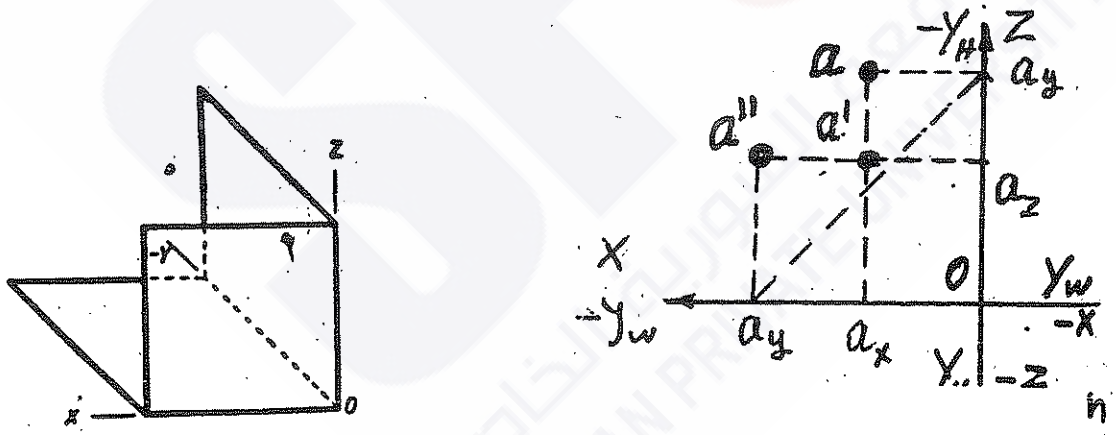
مثال ـ ٢ ـ عبر في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي عن الأوضاع الفراغية للنقطة A الموضحة في التعابير الفراغية (I و II) في الشكل (٢) .

الحل : تمثل التعابير الفراغية في الشكل (٢) وضعي النقطة A في منطقتي الفراغ الأولى والثانية المقسمتين بواسطة مستويات الاسقاط الثلاثة.

لذلك يمثل التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي لهذين الوضعين التعبير النموذجي لأوضاع النقطة الهندسية في مختلف مناطق تقسيمات الفراغ بواسطة مستويات الاسقاط .



I - الوضع الفراغي والاسقاطي لنقطة في الثمن الأول .



II - الوضع الفراغي والاسقاط لنقطة في الثمن الثاني .

الشكل رقم (٢)

ثانيا ـ تمارين تطبيقية :

ا ـ عبّر عن الوضع الفراغي للنقاط التالية من خلال تحديد مساقطهـــا في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي :

المجاميع	الاحداثيات	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
I	X	5	15	30	20	10	25	-35	-40	-45	-50	-55
	Y	10	10	15	-25	-20	30	40	45	-50	-55	-60
	Z	20	25	20	15	-25	-10	30	-35	40	-45	50
II	X	10	20	35	25	15	30	-40	-45	-50	-55	-60
	Y	15	15	20	-30	-25	35	45	50	-55	-60	-65
	Z	25	30	25	20	-30	-15	25	-40	45	-50	55
III	X	15	25	40	30	20	35	-45	-50	-55	-60	-5
	Y	20	20	25	-35	-30	40	50	55	-60	-65	-70
	Z	30	35	30	25	-35	-20	40	-45	50	-55	60
IV	X	20	30	45	35	25	40	-50	-55	-60	-5	-10
	Y	25	25	30	-40	-35	45	55	60	-65	-70	-75
	Z	35	40	35	30	-40	-25	45	-50	55	-60	65
V	X	25	35	50	40	30	45	-55	-60	-5	-10	-15
	Y	30	30	35	-45	-40	50	60	65	-70	-75	-20
	Z	40	45	40	35	-45	-30	50	-55	60	-65	70

11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	الاحداثيات	المجاميع
-20	-15	-10	-5	-60	50	35	45	55	40	30	X	
-25	-20	-75	70	65	55	-45	-50	40	35	35	Y	VI
75	-70	65	-60	55	-35	-50	40	45	50	45	Z	
-25	-20	-15	-10	-5	55	40	50	60	45	35	X	
-30	-25	-20	75	70	60	-50	-55	45	40	40	Y	VII
20	-75	70	-65	60	-40	-55	45	50	55	50	Z	
-30	-25	-20	-15	-10	60	45	55	65	50	40	X	
-35	-30	-25	20	75	65	-55	-60	50	45	45	Y	VIII
25	-20	75	-10	65	-45	-60	50	55	60	55	Z	
-35	-30	-25	-20	-15	65	50	60	70	55	45	X	
-40	-35	-30	25	20	70	-60	-65	55	50	50	Y	IX
30	-25	20	-15	70	-50	-65	55	60	65	60	Z	
-40	-35	-30	-25	-20	70	55	65	75	60	50	X	
-45	-40	-35	30	25	75	-65	70	60	55	55	Y	X
35	-30	25	-20	75	-55	-70	60	65	70	65	Z	
-45	-40	-35	-30	-25	15	60	10	20	65	5	X	
-50	-45	-40	35	30	20	-70	-75	5	60	60	Y	XI
40	-35	30	-25	20	-60	-75	5	10	75	70	Z	

٢ـ ارسم في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي مساقط النقاط المنـــاظرة للنقاط المذكورة في السؤال (١) بالنسبة لمستوي الاسقاط الأفقي H .

٣ـ ارسم في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي مساقط النقاط المنـــاظرة للنقاط المذكورة في السؤال (١) بالنسبة لمستوي الاسقاط الأمامي V .

٤ـ ارسم في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي مساقط النقاط المنـــاظرة للنقاط المذكورة في السؤال (١) بالنسبة لمستوي الاسقاط الجانبي W .

٥ـ ارسم في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي مساقط النقاط المنـــاظرة للنقاط المذكورة في السؤال (١) بالنسبة لخط الأرض (OX) .

٦ـ ارسم في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي مساقط النقاط المنـــاظرة للنقاط المذكورة في السؤال (١) بالنسبة لمحور الاسقاط (OY) .

٧ـ ارسم في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي مساقط النقاط المنـــاظرة للنقاط المذكورة في السؤال (١) بالنسبة لمحور الاسقاط (OY) .

٨ـ حدد موقع النقاط الفراغية التالية بالنسبة لمستويات الاسقاط الثلاثـــة وارسم مساقطها في التعبير الأسقاطي الثلاثي : A(0,30,45) , B(25,0,40), C(20,35,0), D(0,0,25), E(0,15,0), F(30,0,0)

ارسم في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي مساقط النقطة الفراغية الواقعة في الثمن الأول من تقسيمات الفراغ بواسطة مستويات الاسقـــاط والتي تبعد (٣٠) سم عن مستوي الاسقاط الجانبي وتحقق احداثيـــــاتها العلاقة : $2X = 3Y = 5Z$

١٠ـ استكمل رسم مساقط النقاط التالية ، الشكل (٣) ، في التعبيـــــــر الاسقاطي المستوي الثلاثي اذا كانت القيم المطلقة لاحداثياتها تحقـــق العلاقة المبينة ازاء كل منها :

آ ـ النقطة A واقعة في الثمن II و $|Z| = 2|Y|$

ب ـ النقطة B واقعة في الثمن I و $2|X| = 3|Z|$

جـ ـ النقطة C واقعة في الثمن VI و $|Y| = 2|X|$

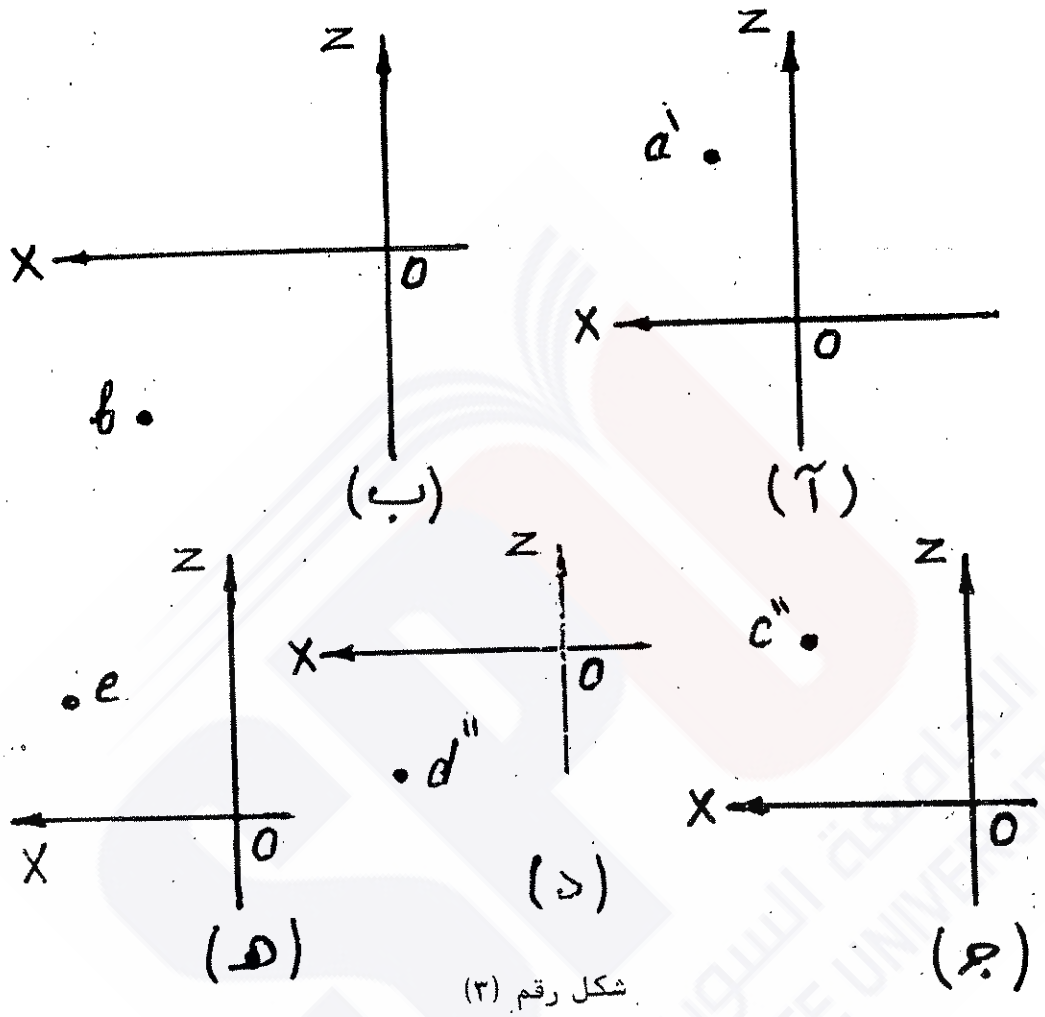
د ـ النقطة D واقعة في الثمن VIII و $|X| = 2|Z|$

هـ ـ النقطة E واقعة في الثمن III و $|Z| = |Y|$

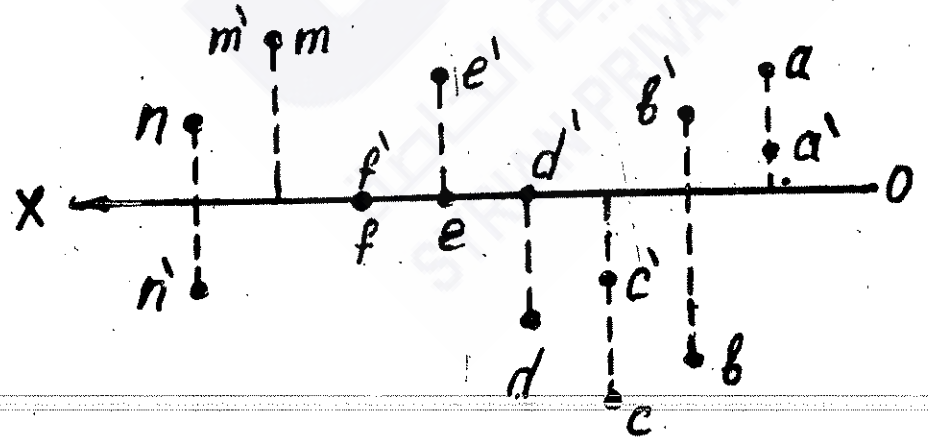
١١ـ حدد الوضع الفراغي للنقاط التي الشكل (٤) بالنسبة لمستويات الاسقاط في التعبير الاسقاطي الثنائي .

١٢ـ حدد في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي الوضع الفراغي للنقاط المذكورة أدناه :

النقاط المعنية	A	B	C	D
بعد النقطة عن مستوي الاسقاط الأمامي V ، سم	20	-30	25	-20
بعد النقطة عن مستوي الاسقاط الأفقي H ، سم	30	10	-15	-25



شكل رقم (٣)



شكل رقم (٤)

الفصل الثاني

((المستقيم وتمثيله))

أولا ـ أمثلة تطبيقية :

أ ـ حدد الوضع الفراغي للمستقيم المار من النقطتين A(10,10,20) و B(35,45,40) من خلال التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي .

لحل : يمكن التعبير عن وضع أي مستقيم من خلال التعبير عن وضع نقطتين من نقاطه على الأقل ولذلك نقوم بتحديد الوضع الفراغي لنقطتين عبر تحديد مساقطها في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي وفق الخطوات التالية (الشكل ٥) :

- نحدد مقياس الرسم ونرسم محاور الاحداثيات ونحدد النقاط a_x و a_z و a_{y_h} على المحاور OX و OZ و OY_h على التوالي ومن ثم نقوم بنقل a_{y_h} الى محور OY_w فنحدد a_{y_w} .
- نقيم من النقاط a_x و a_z و a_{y_h} و a_{y_w} أعمدة على محاور الاسقاط فتحدد نقاط تقاطع كل اثنين منها أحد مساقط النقطة A ، فيحدد تقاطع العمودين المقامين من a_x و a_z على المحورين OX و OZ على التوالي المسقط الأمامي 'a ويحدد تقاطع العمودين المقامين من a_x و a_{y_h} على المحورين OX و OY_h على التوالي لمسقط الأفقي a ويحدد تقاطع العمودين المقامين من a_z و a_{y_w} على

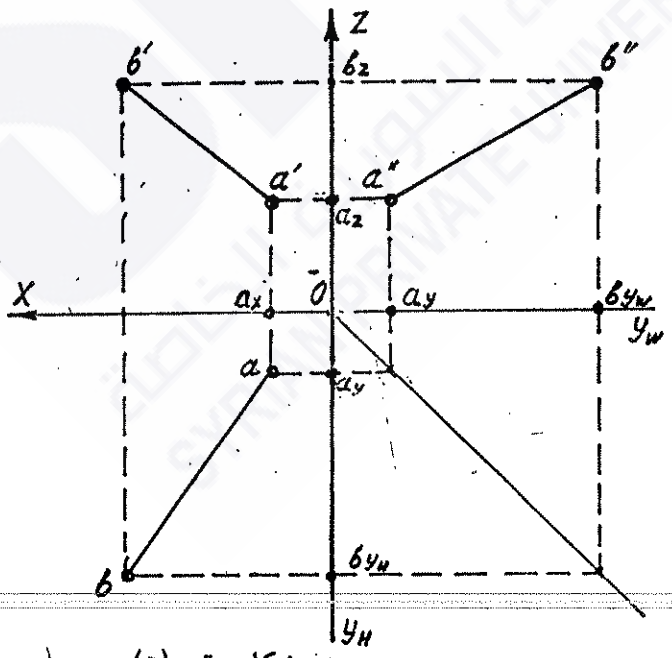
المحورين OZ و OY_W على التوالي المسقط الجانبي "a .

ج ـ ونحدد بالطريقة ذاتها مساقط النقطة B : الأمامي 'b والأفقي b والجانبي "b .

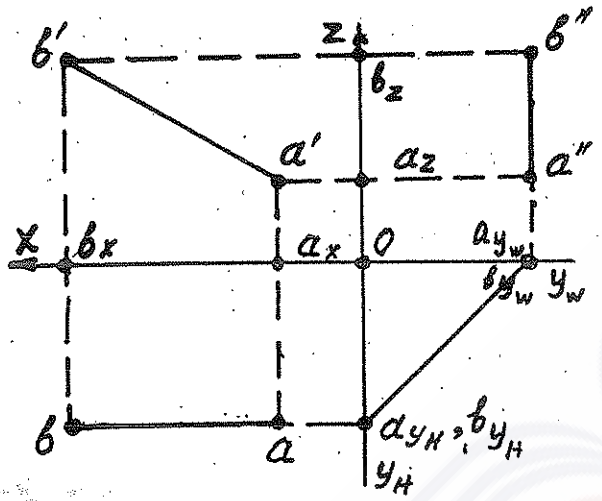
د ـ نمرر من كل مسقطين متماثلين للنقطتين A و B مستقيما فنحصل على مساقط المستقيم AB : الأفقي ab والأمامي 'a'b والجانبي "a"b.

٢ـ ماهو الوضع الفراغي لمقطع المستقيم المحدد بالنقطتين A(10,20,10) و B(35,20,25) بالنسبة لمستويات الاسقاط ؟

الحل : نحدد مساقط النقطتين A و B وفق الطريقة المذكورة آنفا ونوصل بين كل مسقطين متماثلين لهما فنحصل على مساقط المستقيم AB المطلوبة . من هذه المساقط نلاحظ أن المسقط الأفقي ab يوازي خط الأرض (OX) وأن المسقط الجانبي "a"b يوازي المحور (OY_W) كما هو



شكل رقم (٥)



شكل رقم (٦)

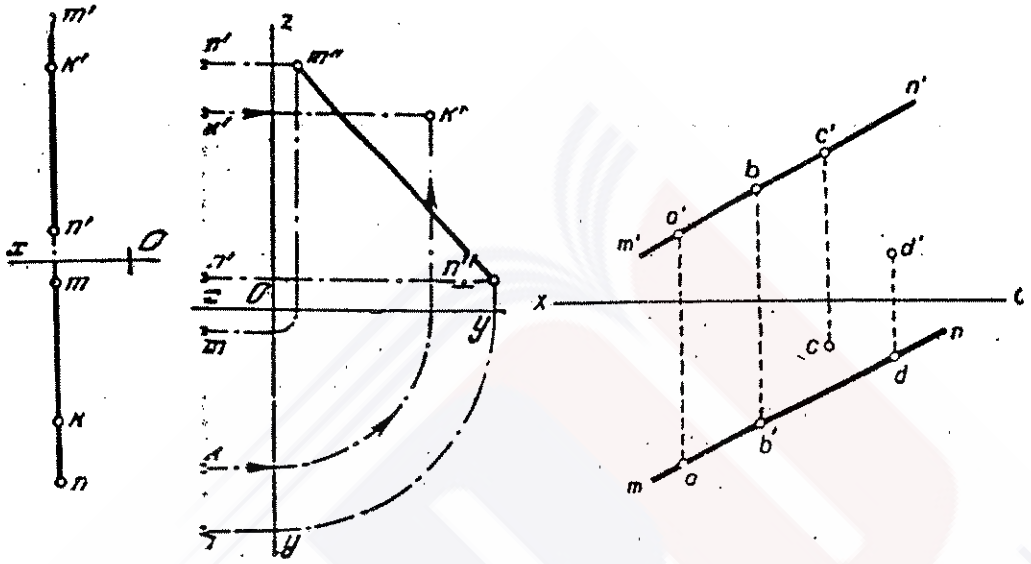
موضح في الشكل رقم (٦) ، وهذا يعني أن لدينا مستقيما أماميا ، أي موازيا لمستوي الاسقاط الأمامي ولهذا يعبر مسقطه الأمامي عن طوله وميله الفراغي الحقيقيين .

٣ـ هل تنتمي النقاط A و B و C و D الى المستقيم MN أم لا ؟

الحل : اذا كانت النقطة منتمية الى مستقيم فان مساقطها تقع على مساقط المستقيم المماثلة ويكفي عدم وقوع أحد هذه المساقط على المسقط المماثل للمستقيم لكي ينتفي انتماء هذه النقطة الى المستقيم المعني . لذلك نلاحظ من الشكل رقم (٧) أن النقطة A هي النقطة الوحيدة التي تنتمي الى المستقيم AB فالنقطة C يقع مسقطها الأفقي c خارج المسقط ab والنقطة D يقع مسقطها الأمامي d' خارج المسقط a'b' أما النقطة B فبالرغم من أن مسقطيها ينطبقان على مسقطي المستقيم ولكنها لاتنتمي للمستقيم لأن الحالة المتطابقة ليست متماثلة ، فالمسقط الأمامي b' ينطبق على المسقط الأفقي ab والمسقط الأفقي b ينطبق على المسقط الأمامي للمستقيم a'b' .

٤ـ هل تنتمي النقطة K(k,k') للمستقيم المار من النقطتين M(m,m') و N(n,n') (الشكل ٨ آ) .

الحل : اذا استطعنا في المثال السابق تحديد العلاقة بين المستقيم MN والنقاط A و B و C و D بسهولة ومن التعبير الاسقاطي المستوي



شكل رقم (٧)

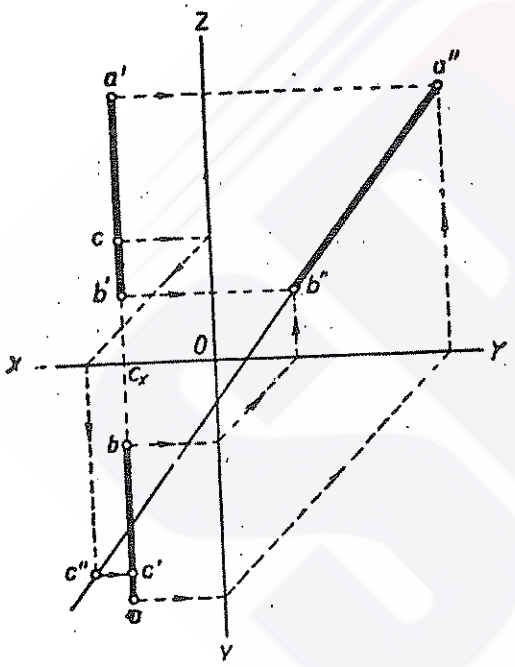
شكل رقم ٨٠

الثنائي وذلك لأن المستقيم في حالته العامة فانه يصعب علينا في هذا المثال التأكد بواسطة التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي من حقيقة العلاقة بين المستقيم MN والنقطة K لأن المستقيم MN ، كما هو واضح من معطيات السؤال التي يوضحها الشكل (٨ آ)،مستقيم جانبي . مسقطاه الأمامي m'n' والأفقي mn عموديان على خط الأرض ويقع مسقطا النقطة K الأفقي k والأمامي k' على مساقط المستقيم المماثلة لها . لكن هذا غير كافي لإثبات انتماء النقطة K الى المستقيم MN ، فمن الممكن أن يقع كلاهما في مستو جانبي واحد من غير أن يتطابقا . لذلك يعود القرار الحاسم الى وضعهما الاسقاطي الجانبي وبالتالي يجب استخدام التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي حتى يكون المستقيم جانبياً . وعند ذلك ، كما هو واضح في الشكل (٨ ب)، نجد أن المسقط الجانبي "k للنقطة K يقع خارج المسقط الجانبي "m"n للمستقيم MN وهذا يعني أن النقطة K لاتنتمي الى المستقيم MN .

هـ ـ استكمل مساقط النقطة C المنتمية الى المستقيم المار من النقطتين A(25,55,65) و B(25,20,20) اذا كان معلوما قيمة احداثيات $y_c = -30$ فقط .

الحل :

آ ـ بعد تحديد مقياس الرسم ومحاور الاسقاط ورسم مساقط المستقيم AB الأفقي ab والأمامي a'b' والجانبي a"b" نجد أن المستقيم AB هو مستقيم جانبي .



شكل رقم (٩)

ب ـ بما أن النقطة C تنتمي الى المستقيم AB فان مساقطها تقع على المساقط المماثلة للمستقيم . وعند تحديد المسقط الأفقي c للنقطة C نلاحظ أنه يقع على المسقط الأمامي a'b' للمستقيم . لكن هذا لايتعارض مع القاعدة المذكورة أعلاه لأن المسقطين الأفقي ab والأمامي a'b' للمستقيم الجانبي AB يقعان على استقامة واحدة ويعامدان خط الأرض ولهذا فان المسقط الأفقي c للنقطة C المنتمية للمستقيم يقع على امتداد مسقطه الأفقي ab المتطابق مع مسقطه الأمامي a'b' .

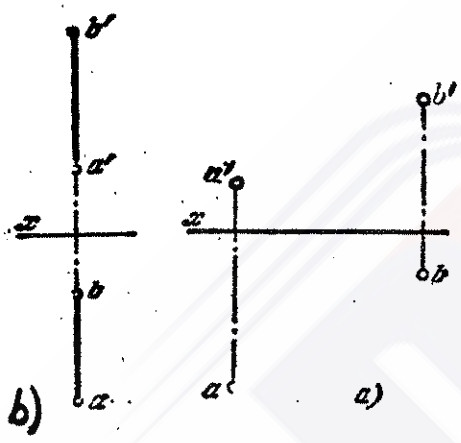
جـ ـ بعد ذلك نستكمل تحديد مساقط النقطة C وفق اتجاهات الأسهم في

الشكل رقم (٩) فنحدد أولا المسقط الجانبي "c الواقع على امتـــداد المسقط الجانبي "a"b للمستقيم AB وبعد ذلك نحدد المسقـــط الأمامي 'c الواقع على امتداد 'a'b المتطابق مع المسقط الأفـقي ab ٠

٦ـ حدد آثار المستقيم المـــار من النقطتين A و B والمحدد :

آ ـ بمساقط النقطتين A و B الشكل (١٠ آ) ٠

ب ـ بمسقطي مقطع المستقيم AB في التعبير الاسقاطي المستـــوي الثنائي (الشكل ١٠ ب) ٠



شكل رقم (١٠)

الحـل : قبل الدخول في خطوات الحـل ؛

لابد من تحديد خصوصية آثار المستقيم ٠

هذه الآثار تمثل نقاط اختراق المستقيم لمستويات الاسقاط ولذلك فهي نقـاط مشتركة بين المستقيم ومستويات الاسقاط ٠ وبما أنها نقاط منتمية للمستقيم فان مساقطها تقع على مساقط المستقيم المماثلة،وبكونها منتمية الى مستـــوي الاسقاط فهي تتطابق مع مسقطها المماثل ويقع مسقطاها الآخران على محـاور الاسقاط ، مثلا :الأثر الأفقي للمستقيم يتطابق مع مسقطه الأفقي ويقع مسقـطه الامامي على خط الأرض ويقع مسقطه الجانبي على محور OY ٠ لذلك ولتحديـــد الآثار المطلوبة نتبع الخطوات التالية :

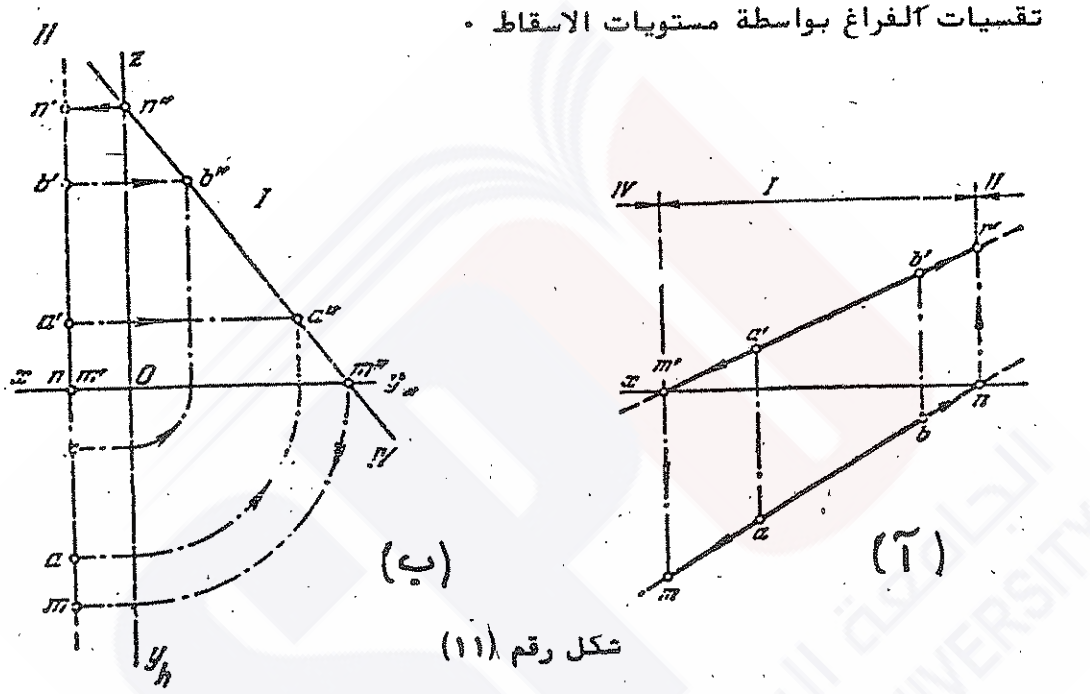
الحالة الأولى (آ) (الشكل ١٠ آ)

١ـ نصل a و b ونصل 'a و 'b فنحصل على المسقطين ab والأمامي 'a'b ٠

٢ـ لتحديد الأثر الأفقي M نمد المسقط الأمامي 'a'b فيقطع خط الأرض في

النقطة 'm المسقط الأمـــامي للأثر الأفقي M (الشكل ١١ آ) .

ملاحظـــة : الأرقام I و II و IV ترمز الى مناطق تقسيات الفراغ بواسطة مستويات الاسقاط .



شكل رقم (١١)

٣ـ نرسم من 'm خط تداع يعامد خط الأرض ونمد المسقط الأفقي ab فنحصل من تقاطعهما على المسقط الأفقي m للأثر الأفقي M المتطابق معه .

٤ـ لتحديد الأثر الأمامي N نمد المسقط الأفقي ab فيقطع خط الأرض في النقطة n المسقط الأفقي للأثر الأمامي N للمستقيم AB ونرسم من n خط تداع يعامد خط الأرض ونمد المسقط الأمامي 'a'b فيتقاطعـــا في النقطة 'n المسقط الأمامي للأثر الأمامي N المتطابق معه .

الحالة الثانية (ب) (الشكل ١٠ ب)

١ـ من الشكل (١٠ ب) نلاحظ أن المستقيم AB هو مستقيم جانبي ولذلـــك كون له أثران أمامي وأفقي فقط ومع ذلك لايمكننا تحديدهما في التعبير

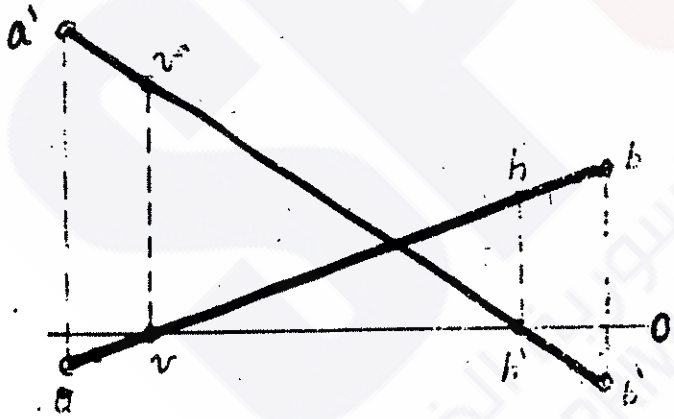
الاسقاطي المستوي الثنائي لتطابق اتجاه المستقيمين الأفقي ab والأمامي a'b' للمستقيم AB . لذلك لابد من استخدام التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي فنرسم المسقط الجانبي "a"b للمستقيم AB.

٢ـ نمد "a"b فيقطع OZ في "n المسقط الجانبي للأثر الأمامي N ويقطع OY_w في "m المسقط الجانبي للأثر الأفقي M للمستقيم AB .

٣ـ نرسم من "n خط تداع يعامد OZ فيقطع امتداد 'a'b في نقطة 'n المسقط الأمامي للأثر الأمامي N المتطابق معه (الشكل ١٦ ب) .

٤ـ ننقل "m من OY_w الى OY_h (الشكل ١١ ب) ونرسم منها خط تداع يعامد OY_h فيقطع امتداد ab في m المسقط الأفقي لأثر الأفقي M المتطابق معه .

٧ ـ حدد في التعبير الاسقاطي الثنائي الموقع الفراغي لمقطع المستقيم AB بالنسبة لمستويات الاسقاط مستعينا بالتنقيط (الشكل ١٣) .



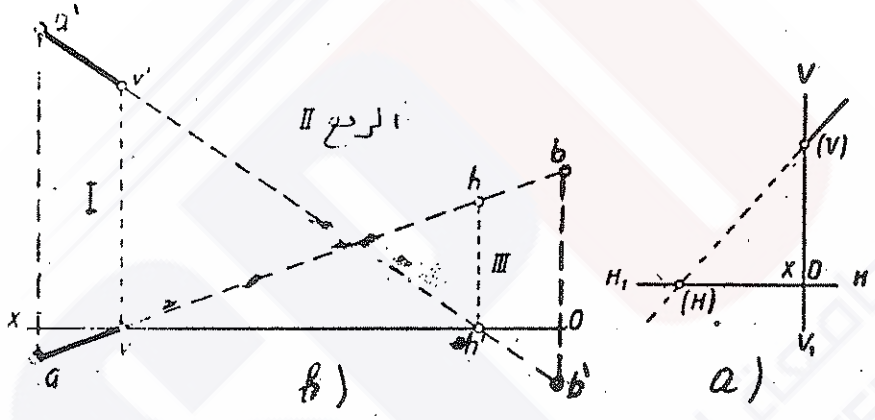
شكل رقم (١٢)

الحل : في التعبير الاسقاطي المستوي تكون العناصر الهندسية الواقعة في الربع (الثمن) الأول فقط مرئية لأنها تقع أمام مستويات الاسقاط . لذلك ترسم بخط متواصل .

أما العناصر الواقعة في بقية تقسيمات الفراغ بواسطة مستويات الاسقاط فتكون غير مرئية (مخفية) وترسم بخط متقطع (منقط) . ويتم تحديد موقع العنصر الهندسي من خلال قيم احداثياته ، وبالنسبة للمستقيم AB في مثالنا

هذا فان تحديد موقعه يتم من خلال تحديد احداثيات نقاطه وآثاره التي توضح انتقاله من قسم لآخر من تقسيمات الفراغ ٠ لذلك نقوم بالخطوات التالية :

١ـ نحدد أثري المستقيم الأمامي (v,v') والأفقي (h,h') ونحصل عليهما في هذا المثال بصورة مباشرة فالمسقط الأفقي يقطع خط الأرض في النقطة v وهي المسقط الأفقي للأثر الأمامي ٠ نقيم منها خط تداع يقطع a'b' في النقطة "v المسقط الأمامي للأثر الأمامي المتطابق معه ٠



شكل رقم (١٣)

المسقط الأمامي a'b' يقطع خط الأرض في النقطة h' المسقط الأمامي للأثر الأفقي ونقيم منها خط تداع يقطع ab في النقطة h المسقط الأفقي للأثر الأفقي المتطابق معه (الشكل ١٢) ٠

٢ـ من الوضع الاسقاطي لنقاط مقطع المستقيم وآثاره نجد أن النقطة A تقع في الربع الأول والنقطة B في الربع الثالث ولهذا يمر المستقيم من الربع الأول الى الربع الثالث مخترقا الربع الثاني (الشكل ١٣ آ) فيكون المقطع AV فقط مرئيا ٠ لذلك يرسم المقطع AV بمسقطيه

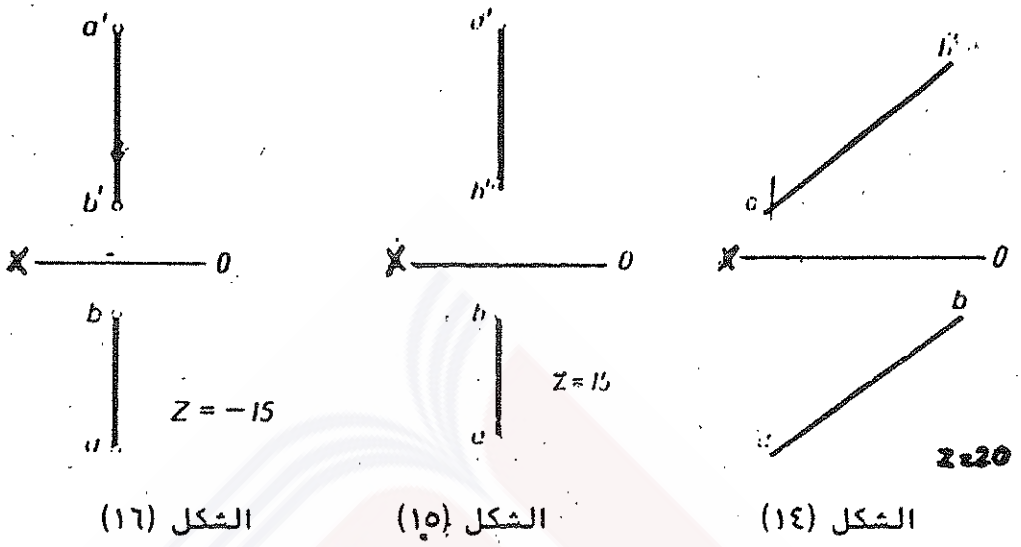
الأمامي a'v' والأفقي av بخط متواصل وبقية مقطع المستقيم VB(vb,v'b') بخط منقط (الشكل ١٣ ب) ويقع مقطعه AV(av,a'v') في الربع الأول ومقطعه (HV(vh,v'h' في الربع الثاني و (HB(hb,h'b' في الربع الثالث .

ثانيا ـ تمارين تطبيقية :

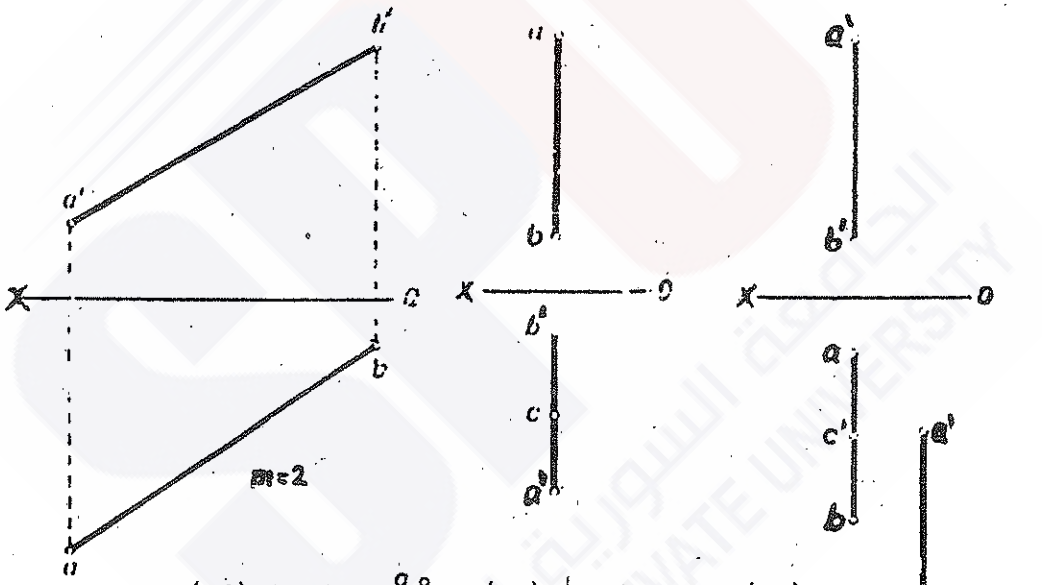
١ـ عبر في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي عن الوضع الفراغي للمستقيمات المارة من النقطتين A و B المحددتين باحداثياتهما في الجدول أدناه :

الاحداثيات	I		II		III		IV		V		VI	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
X	10	60	15	75	20	65	25	60	30	70	35	80
Y	15	65	50	20	-10	60	-15	65	-25	55	-30	-70
Z	20	75	5	60	15	45	-30	10	35	-20	-25	55
	VII		VIII		IX		X		XI		XII	
X	20	85	75	20	15	70	55	15	25	85	75	10
Y	60	-15	-5	-30	-55	20	-20	-35	-35	15	20	-45
Z	30	-5	-40	65	25	45	-15	40	55	10	15	-30

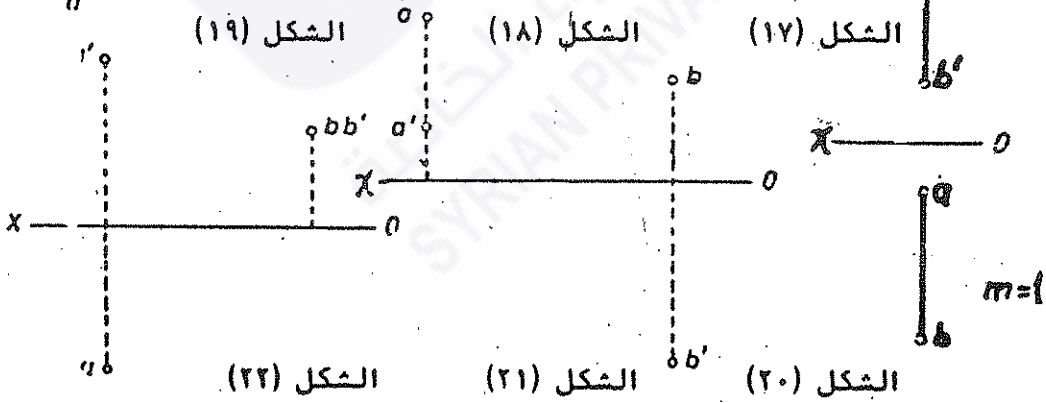
٢ـ هل تنتمي النقاط : C(25,15,15) و D(35,25,30) و E(40,20,25) و F(55,-20,-40) الى المستقيم المار من النقطتين (A(15,5,40 و (B(75,65,10 .



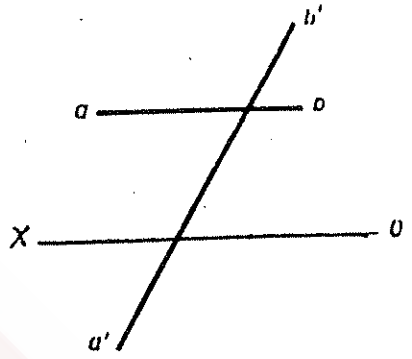
الشكل (١٤) الشكل (١٥) الشكل (١٦)



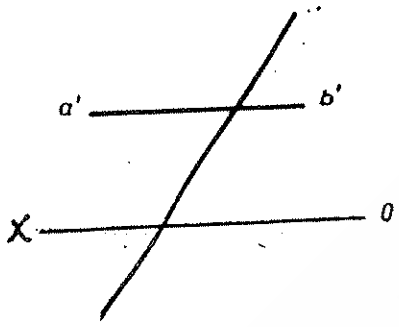
الشكل (١٧) الشكل (١٨) الشكل (١٩)



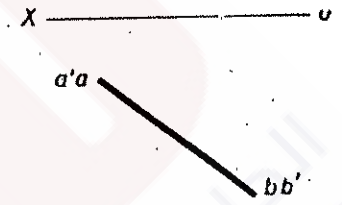
الشكل (٢٠) الشكل (٢١) الشكل (٢٢)



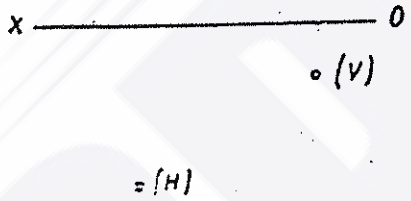
الشكل (٢٣)



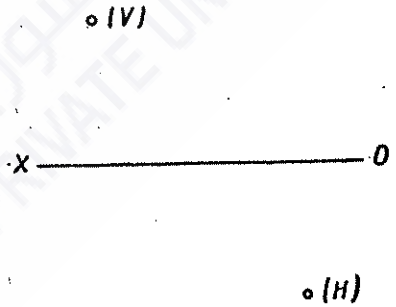
الشكل (٢٤)



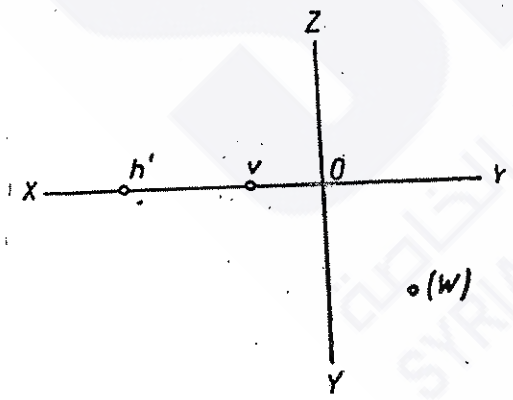
الشكل (٢٥)



الشكل (٢٦)



الشكل (٢٧)



الشكل (٢٨)

٣ـ حدد موقع النقطة C الواقعة على المستقيم المار من النقطتين A(25,-40,-10) و B(25,-5,-30) اذا علم أن مسقطها الأمامي c' يقع على بعد (10) عند النقطة b' من الخارج .

٤ـ حدد موقع النقطة D الواقعة على المستقيم المار من النقطتين M(15,40,45) و N(15,15,15) اذا علم أن مسقطها الأفقي d' يقع بين النقطتين b' و a' وعلى بعد (10) عن b' .

٥ـ حدد موقع النقطة F الواقعة على المستقيم المار من النقطتين A(50,55,5) و B(10,25,55) اذا كانت احداثياتها تحقق العلاقة :

$$\frac{Z}{Y} = \frac{1}{2} .$$

٦ـ حدد موقع النقطة C المنتمية للمستقيم AB المعبر عنه بمسقطيه في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي ، اذا كان :

آ ـ معلوما بعدها عن أحد مستويات الاسقاط (الأشكال ١٤ ـ ١٦) .

ب ـ معلوما أحد مساقطها (الشكلان ١٧ و ١٨) .

جـ ـ معلوما النسبة بين احداثياتها : $m = \frac{Z}{Y}$ (الشكلان ١٩ و ٢٠) .

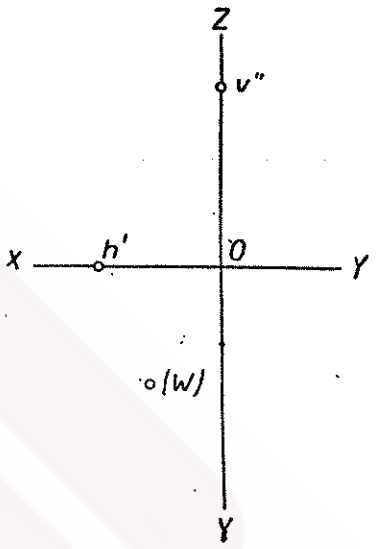
٧ـ حدد أثري المستقيم المار من النقطتين A و B و B(b,b') (الشكلان ٢١ و ٢٢) .

٨ـ حدد آثار المستقيم AB (الأشكال ٢٣ ـ ٢٥) في التعبير الاسقاطي الثنائي .

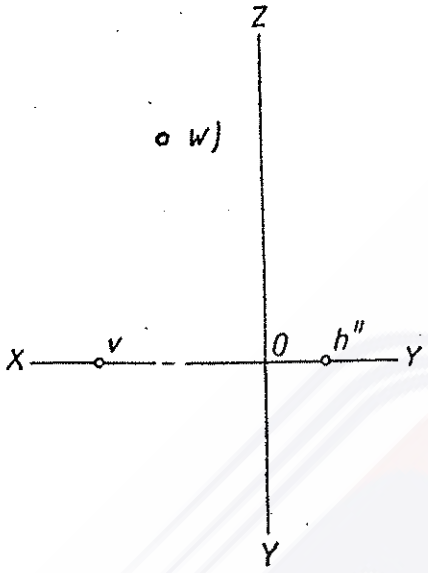
٩ـ ارسم مساقط المستقيم المعلومة آثاره (الشكلان ٢٦ و ٢٧) .

١٠ـ ارسم في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي مساقط المستقيمات المعلومة (المحددة) آثارها أو مساقط آثارها (الأشكال ٢٨ ـ ٣١) .

١١ـ عبر عن الوضع الفراغي للمستقيم المار من النقطتين (A(70,65,-20



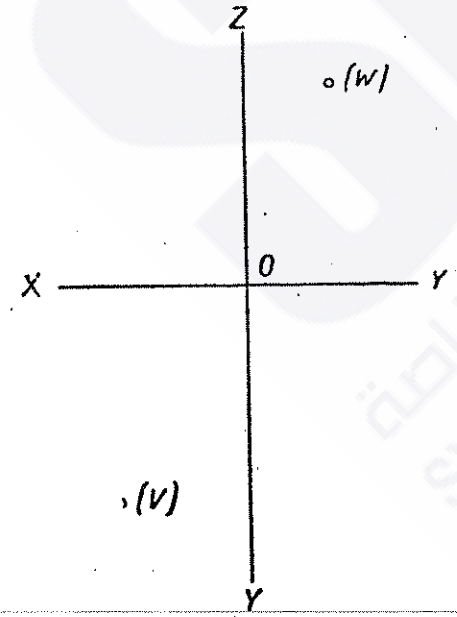
شكل رقم (٢٩)



شكل رقم (٣٠)

و (B(-10,-20,50 في التعبير الاسقاطي الثلاثي وماهي مناطق الفراغ التي يمر بها متجها من النقطة A نحو النقطة B ؟

١٢- ارسم المساقط الثلاثة للمستقيم المار منالنقطتين A(40,30,-20) و B(-10,-20,50) وحدد مناطق الفراغ التي يمر بها متجها من النقطة A نحو B .



شكل رقم (٣١) .

١٣- ارسم مساقط المستقيم المار

من النقطتين A(30,10,30) و B(30,30,30) في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي وحدد موقعه بالنسبة لمستويات الاسقاط مع تحديد آثاره.

١٤ـ ارسم مساقط المستقيم المار من النقطتين A(20,10,60) و B(20,30,20) وحدد موقعه بالنسبة لمستويات الاسقاط .

١٥ـ ماهو الموقع الفراغي بالنسبة لمستويات الاسقاط للمستقيم المار من النقطتين E(20,20,0) و F(50,30,10) ؟ عبر عن ذلك في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي .

١٦ـ حدد نوع المستقيم المار من النقطتين A(30,20,10) و B(30,20,50) وارسم مساقطه في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي وحدد آثاره .

١٧ـ عبر عن الموقع الفراغي للمستقيم المار من النقطتين C(50,40,10) و D(10,40,40) بالنسبة لمستويات الاسقاط في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي .

١٨ـ المستقيم AB محدد بآثاره H(10,15, ؟) و V(60,؟ ,25) ارسم مساقطه وحدد أثره الجانبي .

١٩ـ حدد آثار المستقيم المار من النقطتين A و B في التعبير الاسقاطي الثلاثي .

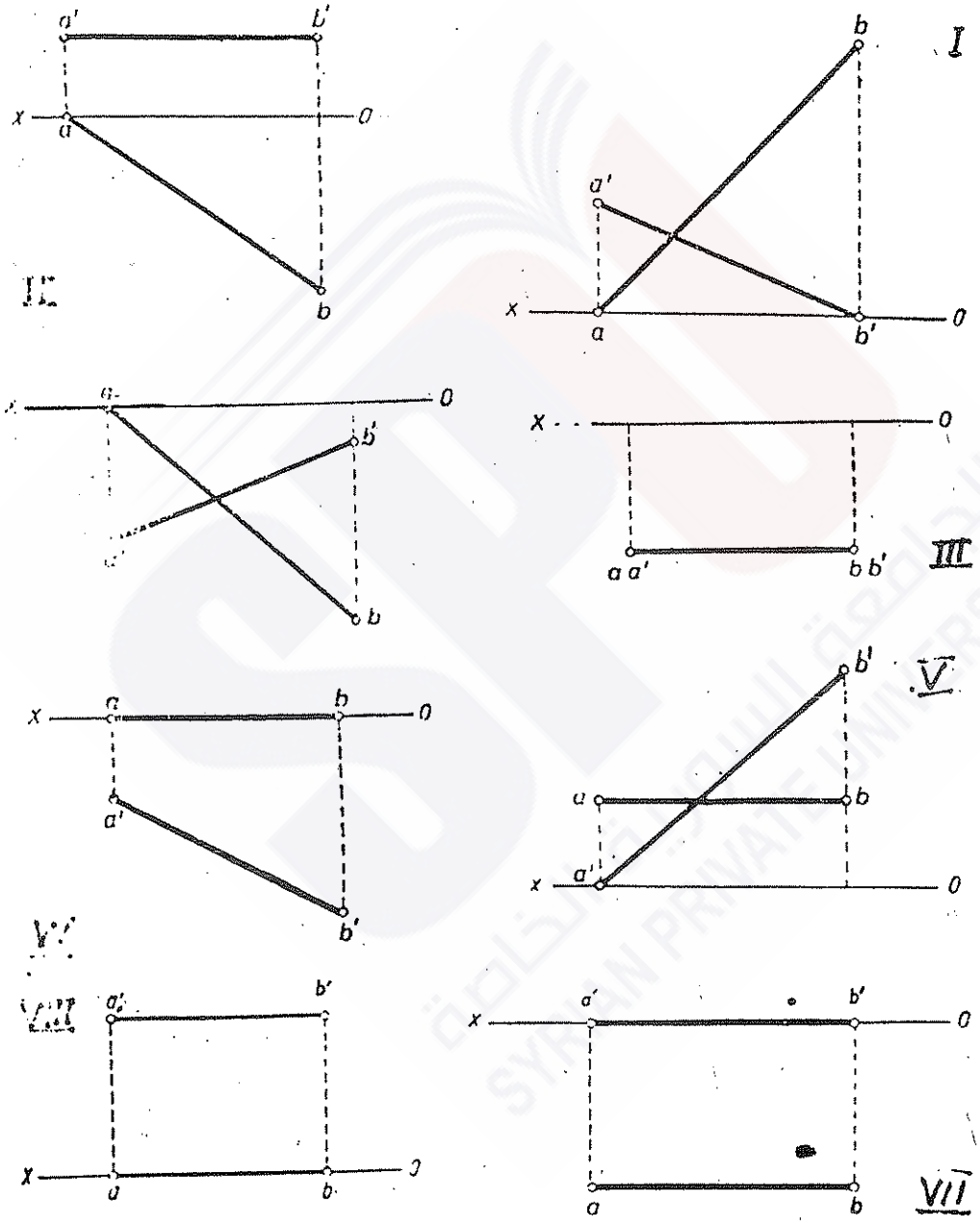
	1		2		3		4		5		6	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
X	10	60	20	70	15	80	25	60	15	70	75	20
Y	15	65	50	10	40	10	-15	65	-55	20	-5	-30
Z	20	75	10	50	25	65	-30	10	25	45	-40	65

12		11		10		9		8		7		
B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	
50	20	75	25	10	10	45	10	85	25	80	25	X
20	40	15	65	15	70	20	20	15	-35	10	60	Y
10	40	25	25	65	20	15	70	10	55	65	15	Z
18		17		16		15		14		13		
85	25	65	5	-40	20	70	180	-30	-100	90	40	X
15	35	20	-60	30	30	10	40	20	70	-50	-10	Y
-40	15	40	15	20	40	-120	-30	40	10	10	30	Z

٢٠ـ حدد الموقع الفراغي لمقطع المستقيم AB بالنسبة لمستويات الاسقـــاط مستخدما التنقيط للتمييز بين الأجزاء المرئية وغير المرئية منه .

6		5		4		3		2		1		
B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	
60	5	85	25	20	75	80	35	70	30	60	25	X
40	-25	15	-35	-30	-5	-70	-30	55	-25	65	-15	Y
-10	50	10	55	65	-40	55	-25	-20	35	10	-30	Z
12		11		10		9		8		7		
80	-20	85	-25	-60	-5	55	10	65	5	15	75	X
25	-40	-15	35	40	25	-70	5	20	-60	35	-10	Y
30	-70	-10	55	10	50	10	-35	-40	15	55	20	Z

٢١ـ حدد حالة مقاطع المستقيمات المحددة بمساقطها في التعبير الاسقاطي الثنائي (الشكل ٣٢) ووضعها (موقعها) الفراغي بالنسبة لمستويات الاسقاط مستعينا بالتنقيط عند الضرورة



شكل رقم (٣٢)

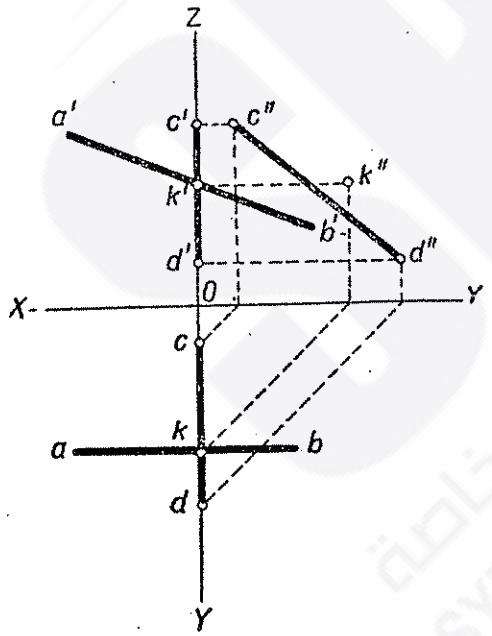
الفصل الثالث

العلاقة المتبادلة بين المستقيمات
وبعض حالات اسقاط الزوايا المستوية

أولاً ـ أمثلة تطبيقية :

ا ـ ماهي العلاقة الفراغية بين المستقيمين AB و CD اذا كانت A(30,35,45) و B(-20,35,20) و C(0,10,45) و D(0,50,10) .

الحل : اذا رسمنا مساقط المستقيمين في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي لوجدنا أن المستقيم AB مستقيم أمامي وأن المستقيم CD مستقيم جانبي . لذلك لابد من استخدام التعبير الاسقاطي المستوي لتحديد العلاقة الفراغية المتبادلة للمستقيمين AB و CD (الشكل ٣٣) .



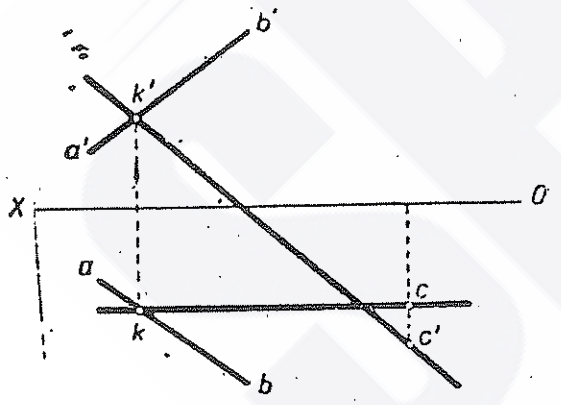
شكل رقم (٣٣)

النقطة K واقعة على المستقيم AB لأن مسقطيها الأفقي k والأمامي k' واقعان على مسقطي المستقيم المماثلين . واذا كان المستقيمان AB و CD متقاطعين فان

النقطة K تنتمي في الوقت ذاته للمستقيم CD ، أي ان مساقطها تقع على مساقطه المماثلة . للتأكد من ذلك نرسم المسقط الجانبي "c"d للمستقيم والمسقط الجانبي "k للنقطة K . نتيجة ذلك نجد أن "k لايقع على "c"d وهذا يعني أن النقطة K لاتنتمي للمستقيم CD لذلك المستقيمان AB و CD غير متقاطعين . وبما أنهما غير متوازيين ، لأن مساقطهما المتماثلة غير متوازية ، فيكونان مستقيمين متخالفين .

٢ـ ارسم من النقطة C(20,20,-30) مستقيما أماميا يقطع المستقيم المار من النقطتين A(100,15,10) و(B(50,45,45 .

الحل : المسقط الأفقي للمستقيم الأمامي يوازي خط الأرض ، لهذا يمكننا الحصول مباشرة على هذا المسقط للمستقيم المطلوب وذلك بأن نمرر من المسقط الأفقي c للنقطة C مستقيما يوازي خط الأرض فيقطع المسقط الأفقي ab للمستقيم AB في النقطة k (الشكل ٣٤) .

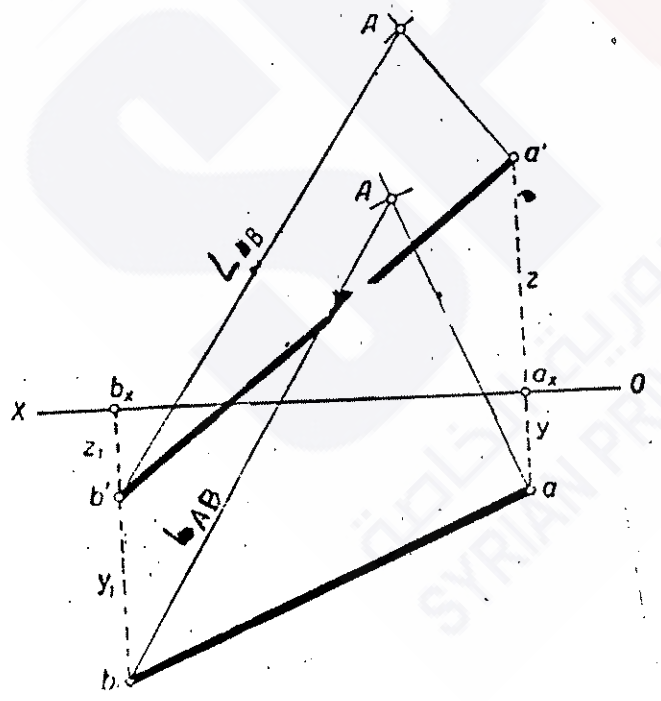


شكل رقم (٣٤)

اذا تقاطع مستقيمان فان مساقط نقطة تقاطعهما تمثل نقاط تقاطع مساقط المستقيمين المتماثلة . لذلك تقع نقاط تقاطع مساقط المستقيمات المتقاطعة المتماثلة على خط تداع (خط اسقاطي) واحد يعامد محور الاسقاط . لهذا فان النقطة k ، التي حصلنا عليها من تقاطع المسقط الأفقي للمستقيم الأمامي المار من نقطة C مع المسقط الأفقي ab ، تمثل

المسقط الأفقي لنقطة تقاطع المستقيمين K ويقع مسقطها الأمامي 'k على خط تداع واحد مع المسقط الأفقي k ويعامد خط الأرض ويقع في الوقت نفسه على المسقط الأمامي 'a'b للمستقيم AB . لذلك نقيم من k مستقيما يعامد خط الأرض (OX) يقطع 'a'b في النقطة 'k المطلوبة . هذه النقطة تمثل في الوقت ذاته المسقط الأمامي لنقطة منتمية للمستقيم المار من النقطة C والمتقاطع مع المستقيم AB (نقطة تقاطعهما) لذلك يمثل المستقيم المار من 'c و 'k المسقط الأمامي 'c'k للمستقيم الأمامي CK المار من النقطة C والمتقاطع مع المستقيم AB ، وهو المطلوب .

٣ـ حدد الطول الحقيقي لمقطع المستقيم المحدد بالنقطتين A(20,25,60) و B(120,65,-20) والمعبر عنه بمسقطيه في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي (الشكل ٣٥) .



شكل رقم (٣٥)

الحل : عندما يكون المستقيم في حالته العامة لاتحدد مساقطه طوله وميله الحقيقيين بالنسبة لمستويات الاسقاط ، لهذا نستخدم لتحديد طول المستقيم الحقيقي طريقة المثلث قائم الزاوية . لأجل ذلك نقوم بالخطوات التالية :

١ـ نختار أحد

المسقطين ليكون قاعدة المثلث قائم الزاوية .

٢ـ نختار احدى نهايتي المسقط ، ولتكن النقطة a' (أو a) ، ونقيم منها عمودا على المسقط الأمامي a'b' (أو ab) فيكون الضلع القائم الثاني في المثلث قائم الزاوية .

٣ـ نأخذ على الضلع القائم الثاني في المثلث مقطعا a'A (أو aA) يساوي طوله فرق احداثيات نهايتي المسقط الأفقي ab (أو المسقط الأمامي a'b') ، أي أن $a'A = b_x b - a_x a = y_1 - y$

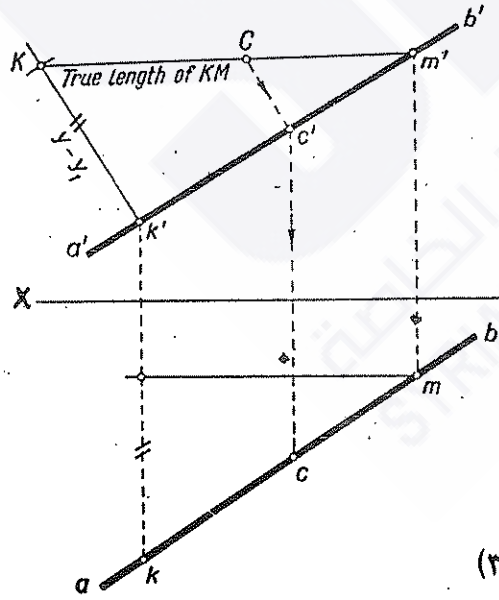
(أو $aA = a_x a' - b_x b' = Z - Z_1$)

٤ـ يمثل المستقيم Ab' (أو Ab) الواصل بين النقطتين b' و A (أو A,b) وتر المثلث قائم الزاوية وبالتالي فهو يمثل الطول الحقيقي للمستقيم AB .

٤ـ حدد على المستقيم AB المعبر عنه بمسقطيه في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي (الشكل ٣٦) ومن النقطة K المنتمية لهذا المستقيم مقطعا طوله ٢٥ ملم وبالاتجاه من النقطة A الى النقطة B .

الحل :

١ـ نختار أحد المسقطين ، وليكن المسقط الأمامي a'b' ، ليكون قاعدة المثلث قائم الزاوية ونقيم من النقطة k' عمودا عليه .



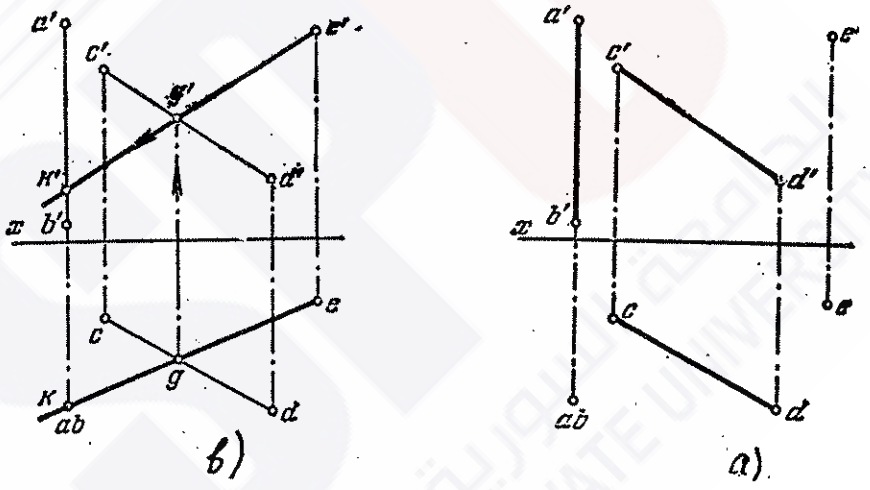
شكل رقم (٣٦)

٢ـ نختار نقطة M(m , m') على المستقيم AB قريبة من النقطة B وناخد على العمود المقام من النقطة 'k على 'a'b مقطعا يساوي طوله فرق احداثيات المسقطين الأفقيين m و k للنقطتين M و K ، أي يساوي $y_m - y_k$ فنحدد النقطة K .

٣ـ يمثل المستقيم 'Km وتر المثلث قائم الزاوية 'Kk'm ويعبر عن الطول الحقيقي لمقطع المستقيم KM .

٤ـ نأخذ على 'Km من النقطة K مقطعا طوله ٢٥ ملم فنحدد النقطة C .

٥ـ مرر من النقطة E (الشكل ٣٧ آ) مستقيما يقطع المستقيمين AB و CD .



شكل رقم (٣٧)

الحل : المستقيم المطلوب يجب أن يحقق ثلاثة شروط

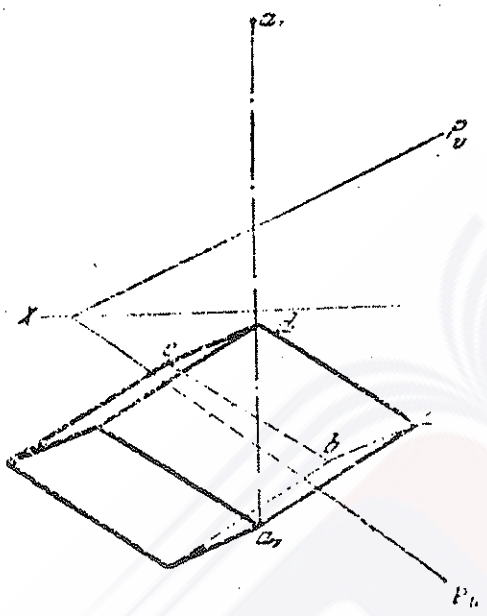
آ ـ يمر من النقطة E ، ب ـ يقطع المستقيم AB ، ج ـ يقطع المستقيم CD . لذلك يجب في التعبير الاسقاطي المستوي (الشكل ٣٧ ب)

تحقيق مايلي :

$a'a'_1$ لحرفه AA_1 الذي طوله (٥٠) ملم (الشكل ٣٤٢) .

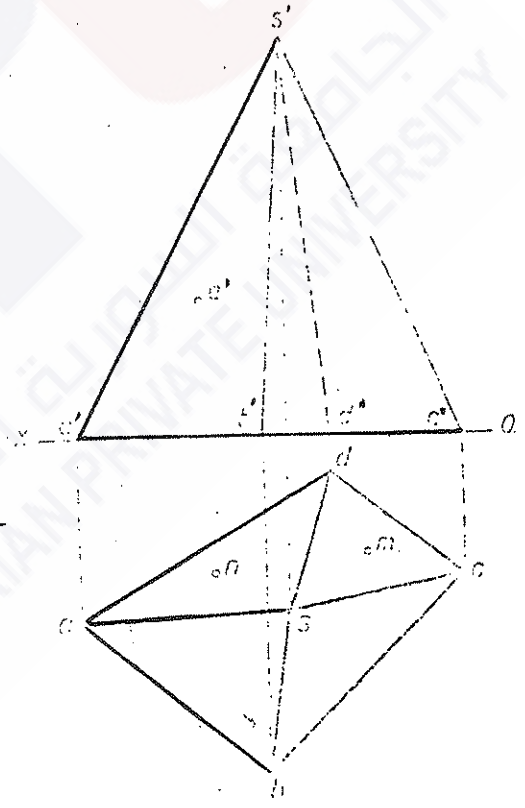
٥ـ استكمل المسقط الأمامي لمتوازي المستطيلات $ABCDA_1B_1C_1D_1$ المستند بقاعدته ABCD على المستوي P اذا كان معلوما مسقطه الأفقي والمسقط الأمامي a'_1 لأحد رووس قاعدته العليا A_1 (الشكل ٣٤٣) .

٦ـ استكمل النقاط المنتمية لسطوح

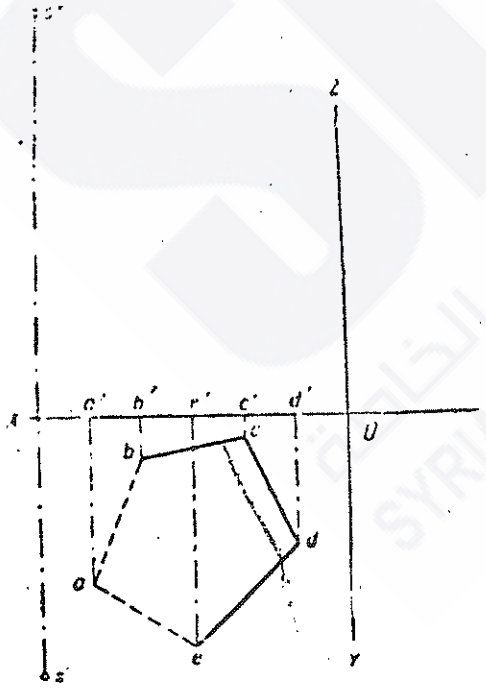


شكل رقم (٣٤٣)

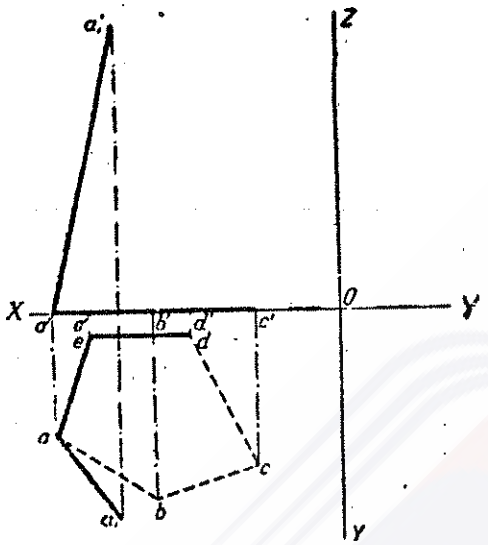
الهرم SABCD : النقطة M تنتمي



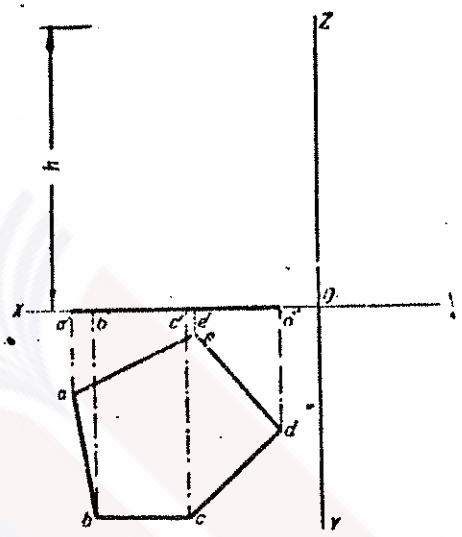
شكل رقم (٣٤٤)



شكل رقم (٣٤٥)

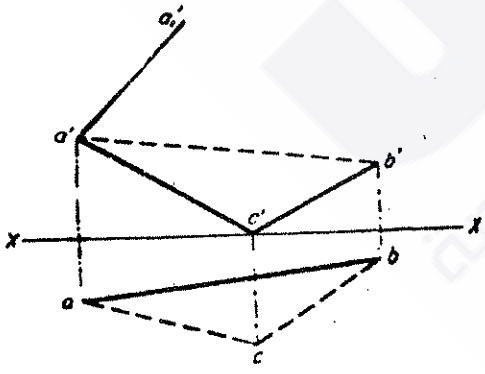


شكل رقم (٣٤٠)

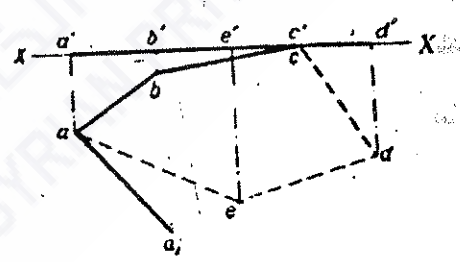


شكل رقم (٣٣٩)

٣ـ استكمل مسقطي الموشور $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ اذا علم المسقط الأفقي لقاعدته السفلى $A_1B_1C_1D_1E_1$ الواقعة في مستوي الاسقاط الأفقي H والمسقط الأفقي aa_1 لحرفه AA_1 الذي يميل بزاوية 60° عن مستوي القاعدة . (الشكل ٣٤١) .



شكل رقم (٣٤٢)



شكل رقم (٣٤١)

٤ـ استكمل مسقطي الموشور اذا علم مسقطي قاعدته ABC والمسقط الأمامي

مخفيا ٠ في مثالنا هذا المسقط الأمامي $b'b'_1$ للحرف المار من رأس الموشور B الأقرب الى مستوي الاسقاط الأمامي كما يعبر عنه مسقطه الأفقي بالنسبة لخط الأرض يكون مخفيا ، ولهذا نرسمه منقطا ٠

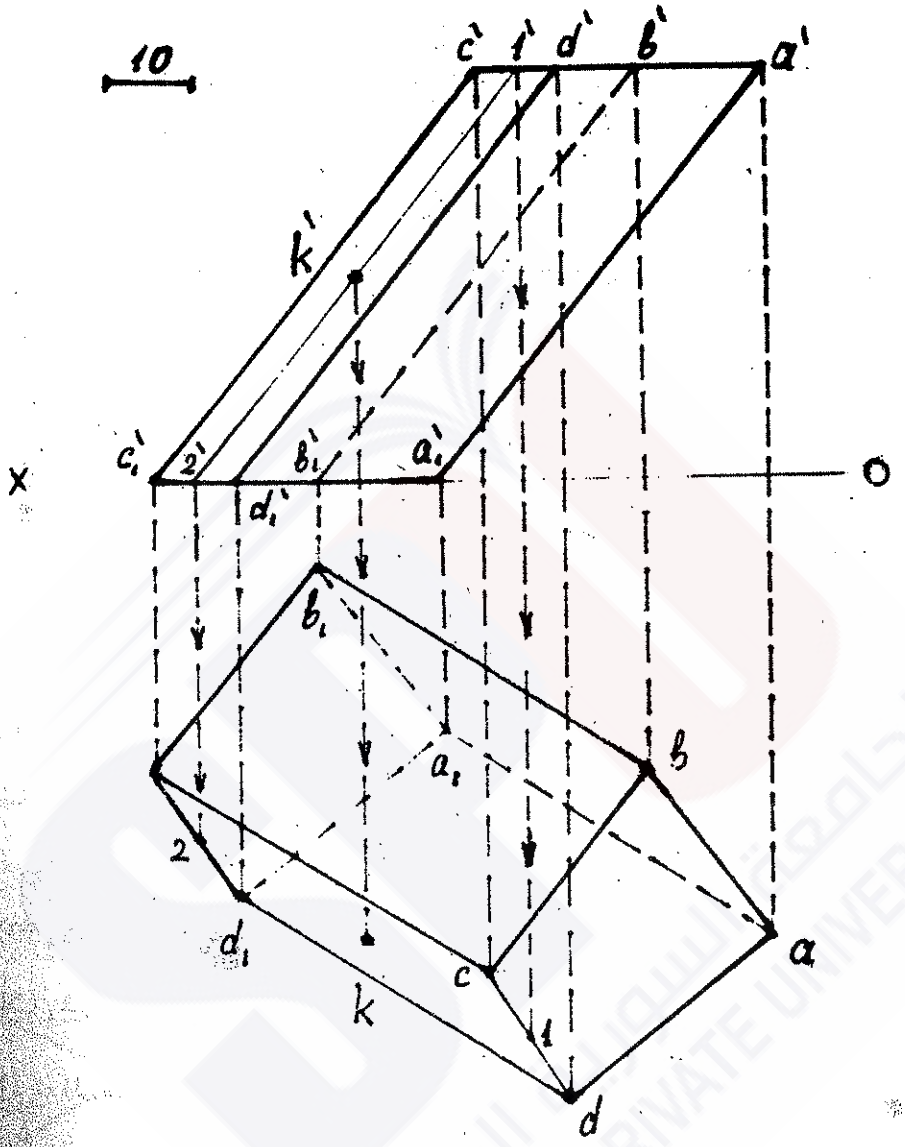
ب ـ في المسقط الأفقي مساقط الحروف الواقعة داخل المسقط (أي الواقعة تحت مساقط أوجه الموشور الأخرى) تكون مخفية أيضا ، وهذا يعني أن المسقط الأفقي aa_1 للحرف AA_1 يكون مخفيا ويرسم منقطا ٠

٤ـ نقوم بتمثيل النقطة K ، فنرسم من معطيات السؤال مسقطها الأمامي k' ٠ النقطة K تقع على السطح CDC_1D_1 اذا وقعت على أحد مستقيماته ٠ لهذا نرسم المسقط الأمامي $1'2'$ للمستقيم 12 المنتمي للسطح المعني مارا من النقطة k' وموازيا لأحرف السطح ٠ بعد ذلك نرسم مسقطه الأفقي 12 ومن النقطة k' نرسم خط تداع يعامد خط الأرض OX فيقطع المستقيم 12 في النقطة k المسقط الأفقي للنقطة المعنية K ٠ وهو المطلوب ٠

تمارين تطبيقية :

١ـ مثل الموشور القائم $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي اذا حدد ارتفاعه h والمسقط الأفقي لقاعدته السفلى ABCDE الواقعة في مستوي الاسقاط الأفقي H (الشكل ٣٣٩) ٠

٢ـ مثل الموشور المائل $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي اذا علم المسقط الأفقي لقاعدته السفلى الواقعة في مستوي الاسقاط الأفقي H ومسقطي أحد حروفه AA_1 الأمامي والأفقي (الشكل ٣٤٠) ٠



شكل رقم (٣٣٨)

- للتمييز بين المساقط المرئية والمخفية نلاحظ مايلي :
- اذا كانت قواعد الموشور عمودية على مستوي الاسقاط (كما هو الحال في المسقط الأمامي لمثالنا هذا) فان الحرف (أو الحروف) الداخلة المارة من رأس القاعدة القريب من مستوي الاسقاط هذا يكون

الفصل السادس

متعددات السطوح المستوية

أولا ـ التعبير الاسقاطي لمتعددات السطوح والعناصر الهندسية الواقعة عليها :

مثال تطبيقي :

يطلب التمثل الكامل للموشور الرباعي المائل $ABCDA_1B_1C_1D_1$ في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي وللنقطة K الواقعة على سطح الموشور CDC_1D_1 .

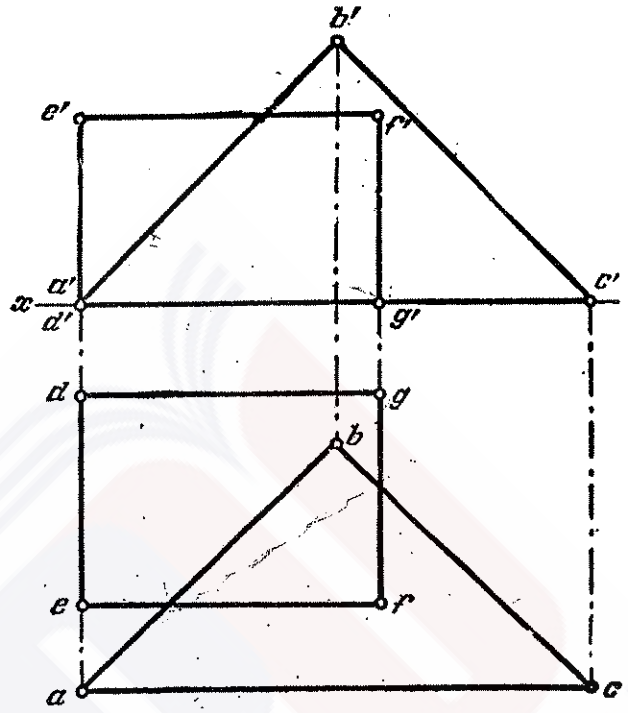
$D(35,75,50)$, $C(45,60,50)$, $B(25,35,50)$, $A(10,55,50)$

$K(60,?,25)$, $D_1(75,50,0)$, $C_1(85,35,0)$, $B_1(65,10,0)$, $A_1(50,30,0)$

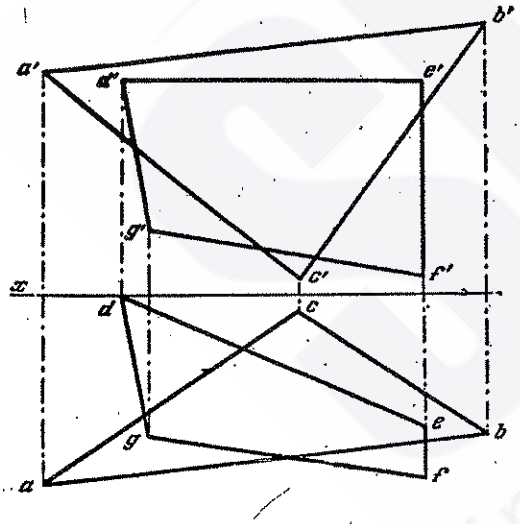
الحل : التمثيل الكامل للموشور يعني رسم مساقطه الأفقية والأمامية والتمييز بين المساقط المرئية والمخفية . لذلك نقوم بالخطوات التالية :

١ـ نرسم مساقط النقاط المحددة له وفق قواعد الاسقاط العامة .

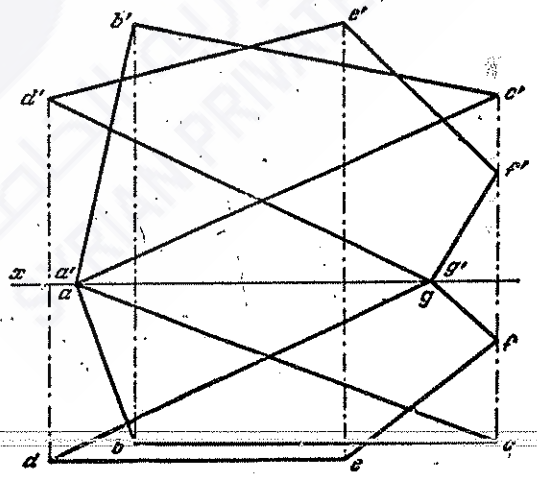
٢ـ نصل مساقط نقاط رؤوس الموشور المتناظرة ، حسب التعريف الهندسي لمتعدد السطوح المستوية ، aa_1 و $a'a'_1$ و bb_1 و bb'_1 ... الخ ، فنحصل على مساقط أحرف الجسم . ونصل مساقط نقاط القاعدة حسب تسلسها فنحصل على مساقط قاعدتيه (الشكل ٣٣٨) .



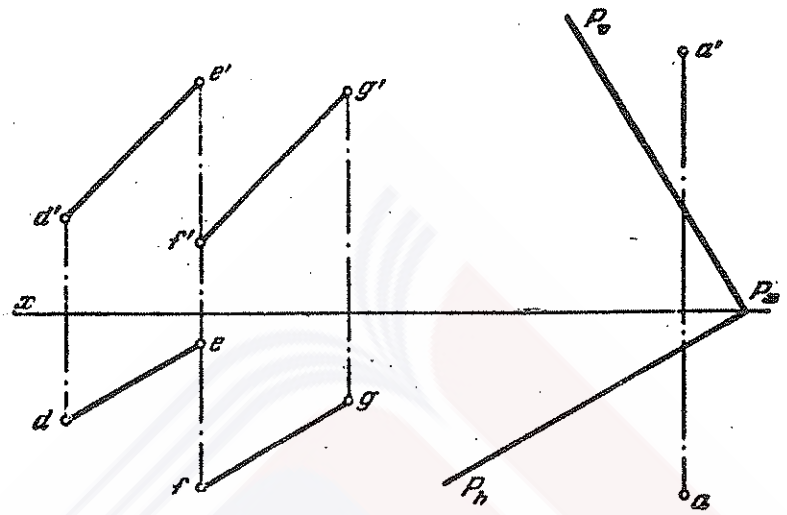
شكل رقم (٣٣٥)



شكل رقم (٣٣٦)

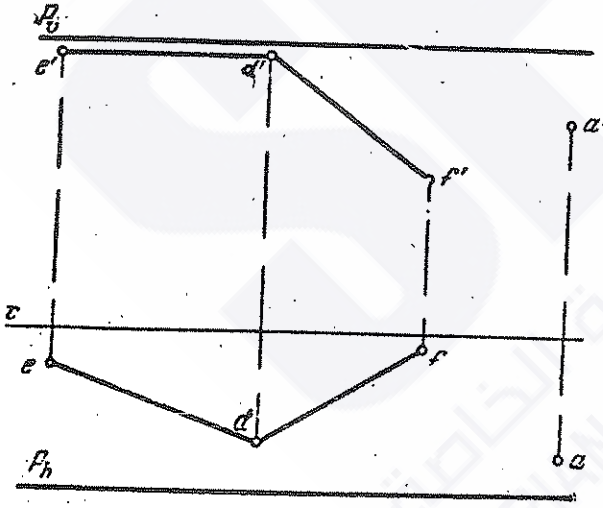


شكل رقم (٣٣٧)



شكل رقم (٣٣٣)

بالمستقيمين المتقاطعين DE و DF (الشكل ٣٣٣) ٠



شكل رقم (٣٣٤)

٦١ـ حدد خط تقاطع مستوي المثلث ABC ورباعي الأضلاع DEFG (الشكل ٣٣٥) مستخدما :

آ ـ التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي ٠

ب ـ التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي ٠

حدد الوضع الفراغي المتبادل للمستويين المتقاطعين مستعينا بالتنقيط ٠

٦٢ـ حدد خط تقاطع مستوي المثلث ABC ورباعي الأضلاع DEFG والوضع الفراغي المتبادل للمستويين المتقاطعين مستعينا بالتنقيط (الشكلان ٣٣٦ ، ٣٣٧) ٠

٥٦ـ مرر من المستقيم AB مستويا يعامد المستوي P (الشكل ٣٢٨) .

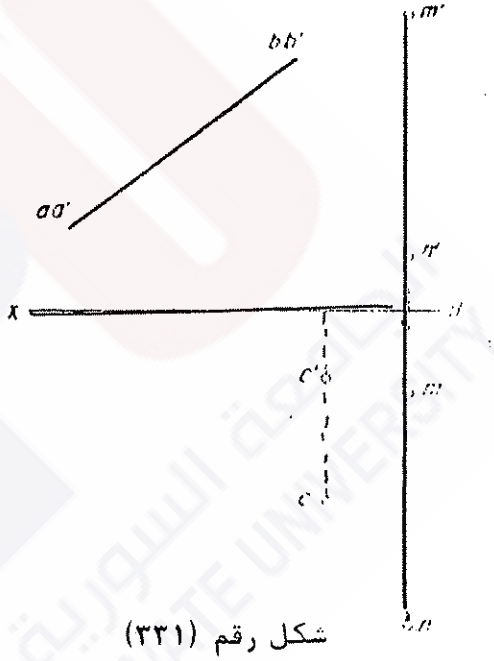
٥٧ـ مرر من المستقيم MN مستويا محددا بأثريه يعامد المستوي المحدد :

آ ـ بالمثلث ABC (الشكل ٣٢٩) .

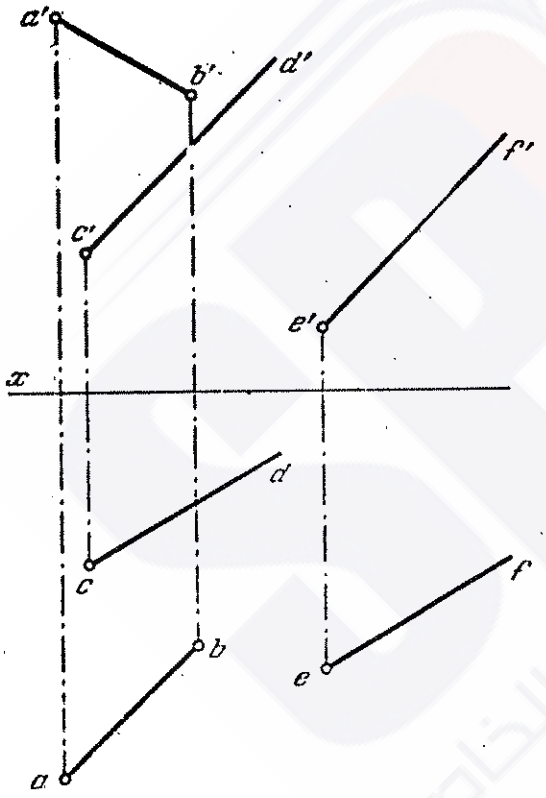
ب ـ بالمستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ٣٣٠) .

جـ ـ بالمستقيم AB والنقطة C (الشكل ٣٣١) .

٥٨ـ ارسم في المستوي المحدد بالمستقيمين المتوازيين CD و EF مستقيما يقطع المستقيم AB بزاوية قائمة (الشكل ٣٣٢) .



شكل رقم (٣٣١)

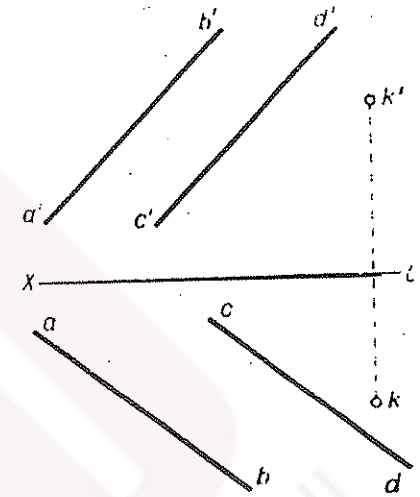


شكل رقم (٣٣٢)

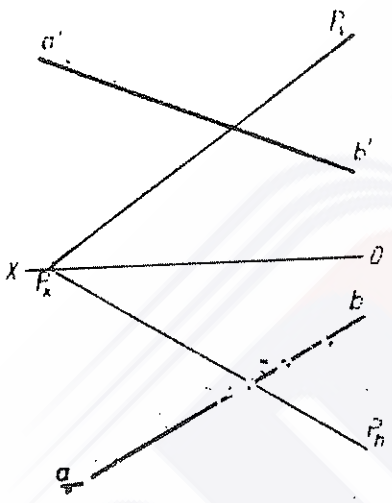
٥٩ـ مرر من النقطة A مستقيما يوازي المستوي P والمستوي المحدد بالمستقيمين المتوازيين DE و FG (الشكل ٣٣٣) .

٦٠ـ مرر من النقطة A مستقيما يوازي المستوى P والمستوي المحـــــدد

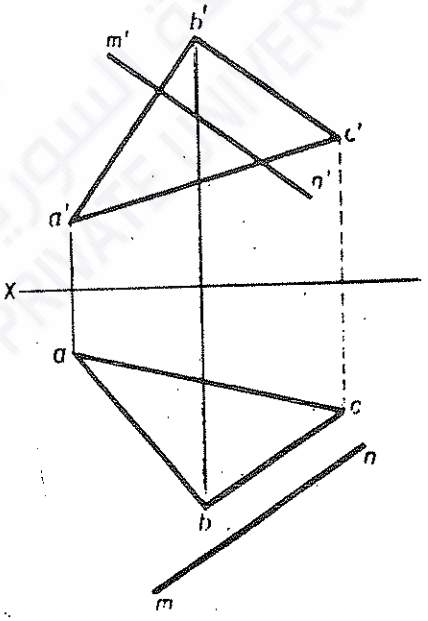
جـ ـ اسقاطيا آماميا S يعامد المستوي المحدد بالمستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ٣٢٧) .



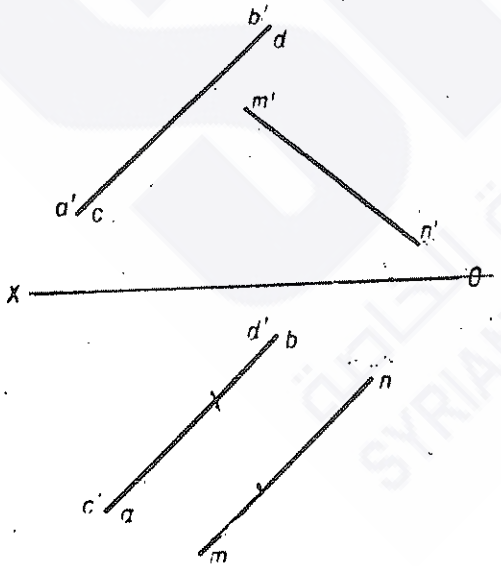
شكل رقم (٣٢٧)



شكل رقم (٣٢٨)



شكل رقم (٣٢٩)

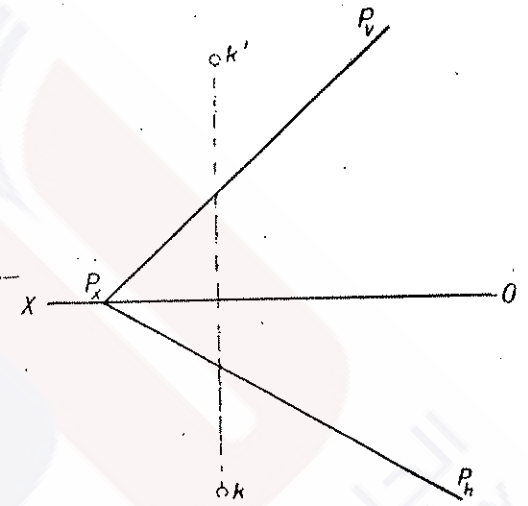


شكل رقم (٣٣٠)

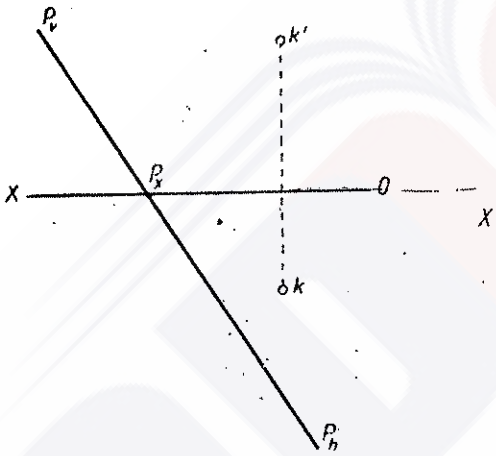
٥٥ـ مرر من النقطة K مستويا :

آ ـ اسقاطيا أفقيا R يعامد المستوي المحدد بالمستقيم AB والنقطة C (الشكل ٣٢٥) .

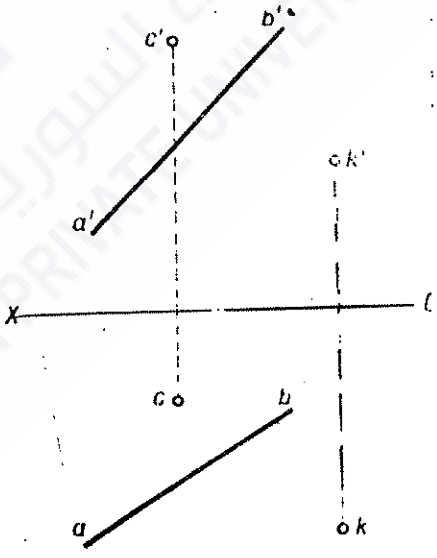
ب ـ اسقاطيا جانبيا T يعامد مستوي المثلث ABC (الشكل ٣٢٦) .



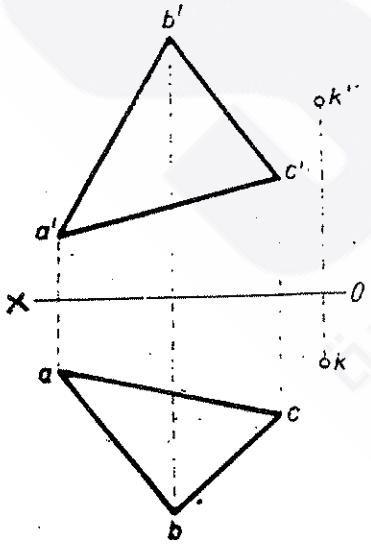
شكل رقم (٣٢٣)



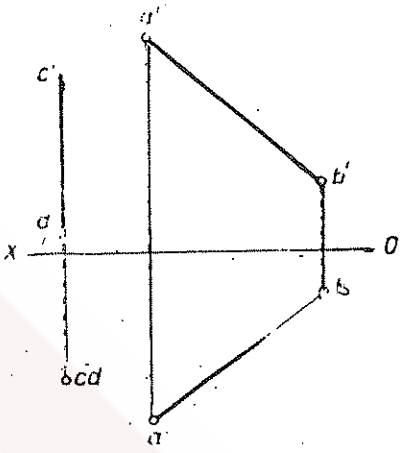
شكل رقم (٣٢٤)



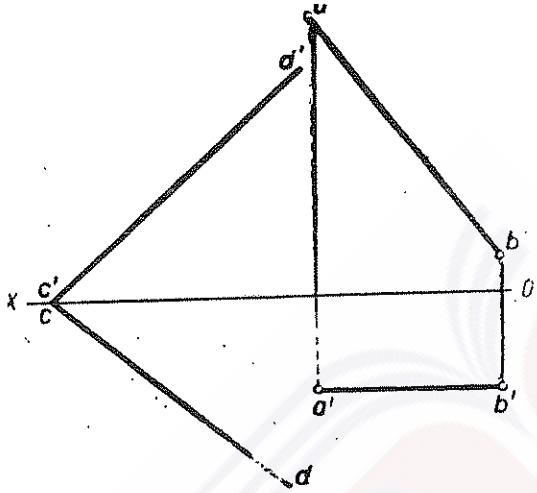
شكل رقم (٣٢٥)



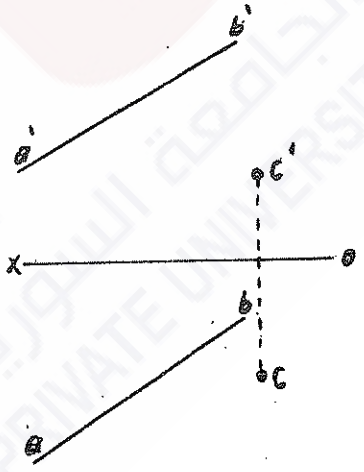
شكل رقم (٣٢٦)



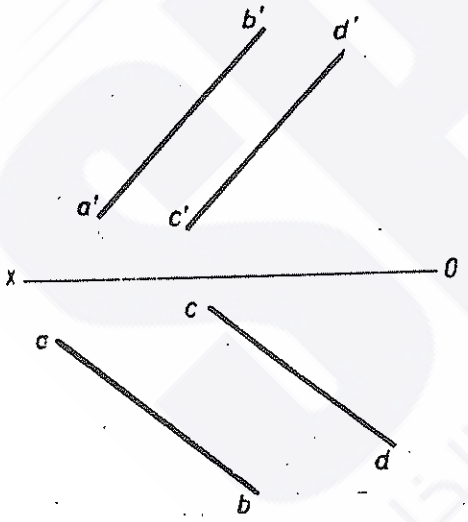
شكل رقم (٣١٩)



شكل رقم (٣٢٠)



شكل رقم (٣٢١)



شكل رقم (٣٢٢)

٤هـ مرر من النقطة K مستويا يعامد المستوي P المحدد بآثاره على أن يكون هذا المستوي : آ ـ اسقاطيا أفقيا R (الشكل ٣٢٣) ،

ب ـ اسقاطيا أماميا S (الشكل (٣٢٤) .

آ ـ بالمثلث ABC (الشكل ٣١٦).

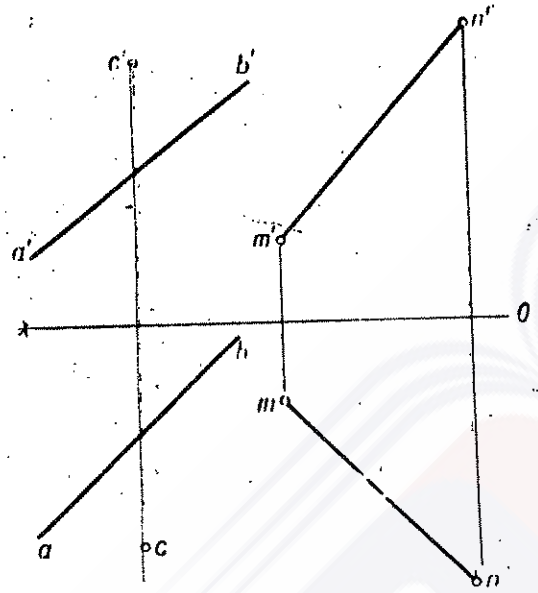
ب ـ بالمستقيم AB والنقطة C (الشكل ٣١٧) .

جـ ـ بالمستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ٣١٨) .

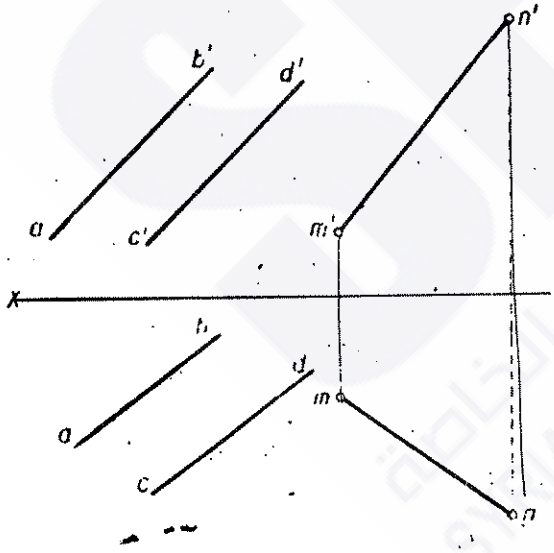
٥١ـ حدد نقطة منتمية للمستقيم CD تقع على بُعد واحد عن نهايتي مقطع المستقيم AB (الشكلان ٣١٩ و ٣٢٠) .

٥٢ حدد المسافة بين النقطة C والمستقيم AB (الشكل ٣٢١).

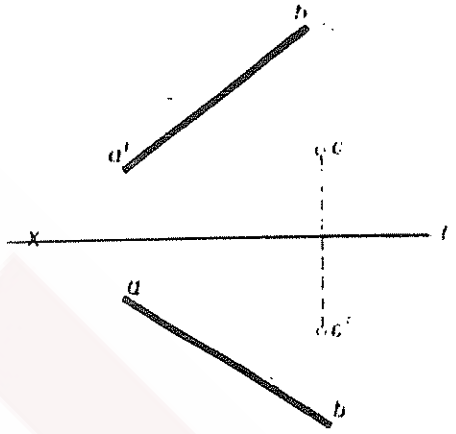
٥٣ـ حدد المسافة بين المستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ٣٢٢) .



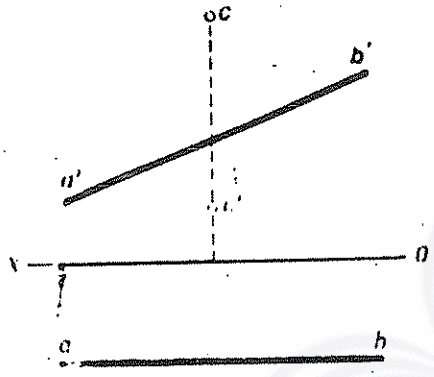
شكل رقم (٣١٧)



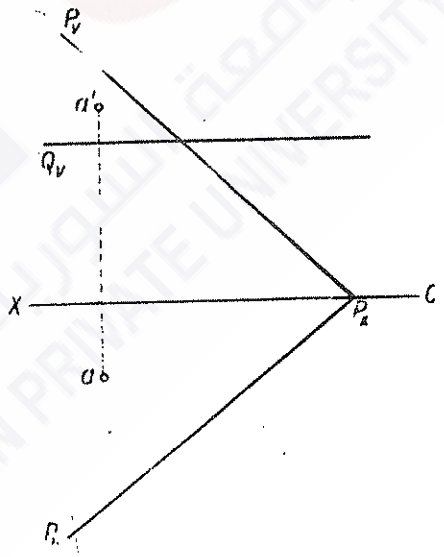
شكل رقم (٣١٨)



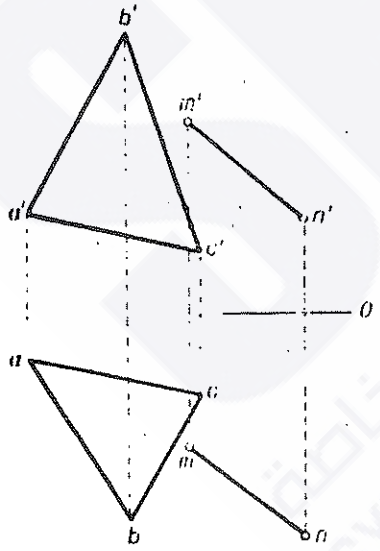
شكل رقم (٣١٣)



شكل رقم (٣١٤)



شكل رقم (٣١٥)



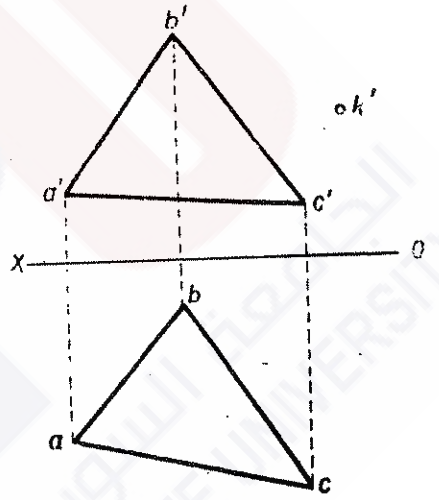
شكل رقم (٣١٦)

٤٧ـ حدد المسقط الناقص للنقطة A التي تبعد مسافة :

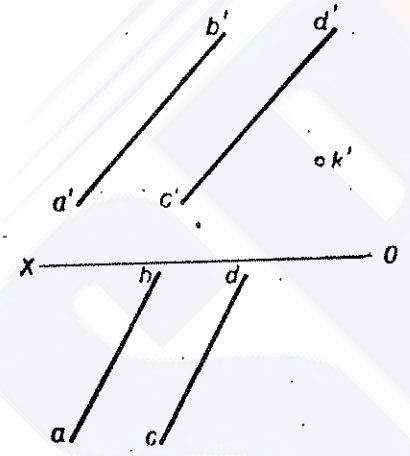
آ ـ (٢٠) ملم عن المستوي المحدد بالمستقيم AB والنقطة C الشكل (٣١٠) .

ب ـ (٢٥) ملم عن مستوي المثلث ABC (الشكل ٣١١) .

جـ ـ (٢٥) ملم عن المستوي المحدد بالمستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ٣١٢) .



شكل رقم (٣١١)



شكل رقم (٣١٢)

٤٨ـ ارسم أثري المستوي P المار من النقطة C والعمودي على المستقيم AB (الشكلان ٣١٣ و ٣١٤) .

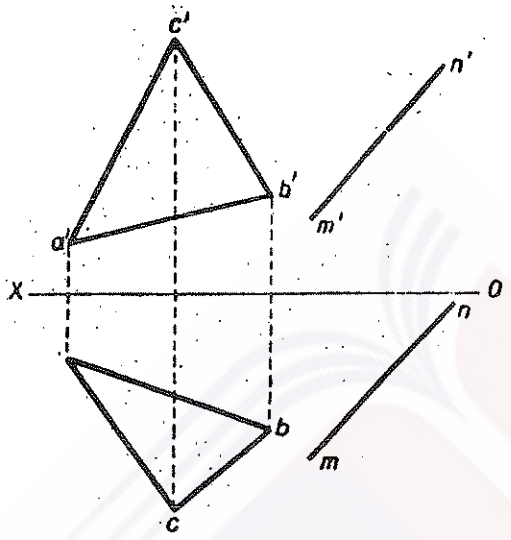
٤٩ـ مرر من النقطة A مستويا يعامد المستويين P و Q (الشكل ٣١٥).

٥٠ـ حدد المحل الهندسي للنقاط المنتمية للمستوي P الواقعة على مسافة متساوية من نهايتي مقطع المستقيم MN اذا كان المستوي P محددا :

٤٤ـ حدد على المستقيم AB نقطة تبعد مسافة (٢٥) ملم عن المستوي P (الشكلان ٣٠٤و٣٠٥).

٤٥ـ حدد على المستقيم MN نقطة تبعد مسافة :

آ ـ (٢٥) ملم عن المستوي المحدد بالمستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ٣٠٦).

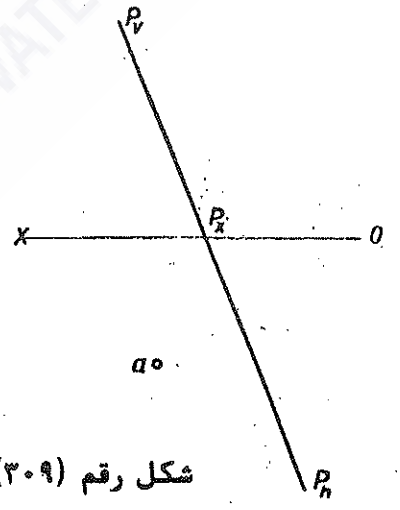


شكل رقم (٣٠٨)

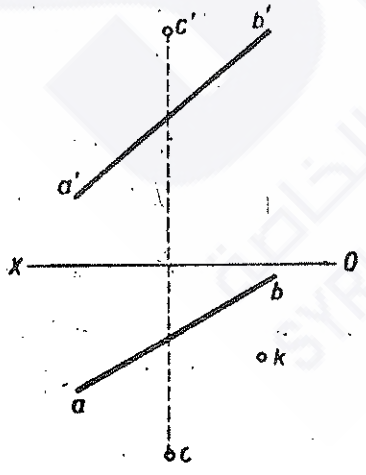
ب ـ (٢٠) ملم عن المستوي المحدد بالمستقيم AB والنقطة C (الشكل ٣٠٧).

جـ ـ (٢٥) ملم عن مستوي المثلث ABC (الشكل ٣٠٨).

٤٦ـ حدد المسقط الناقص للنقطة A التي تبعد عن المستوي P مسافة (٢٥) ملم (الشكل ٣٠٩).



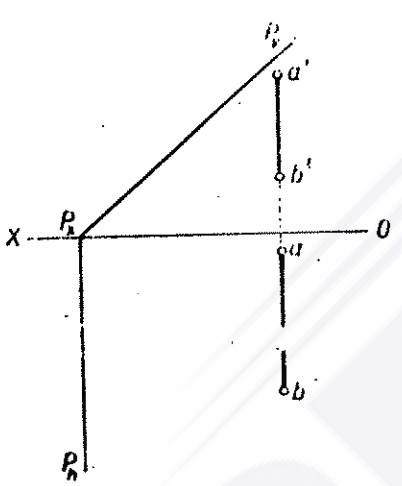
شكل رقم (٣٠٩)



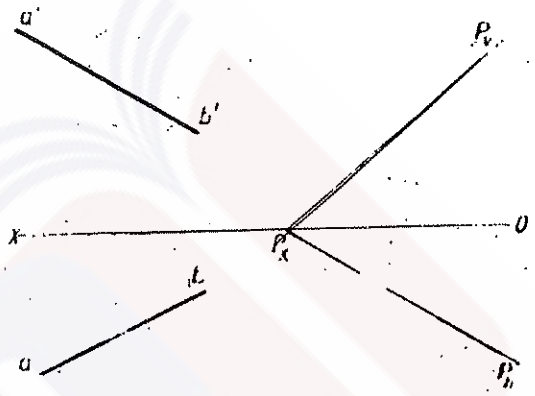
شكل رقم (٣١٠)

ب ـ بالمثلث ABC (الشكل ٣٠٢) مسافة (٢٠) ملم .

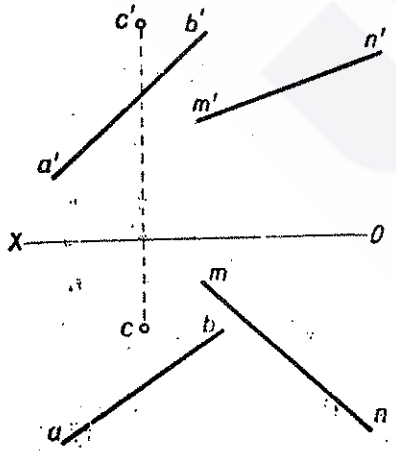
جـ ـ بالمستقيمين AB و CD (الشكل ٣٠٣) مسافة (٣٠) ملم .



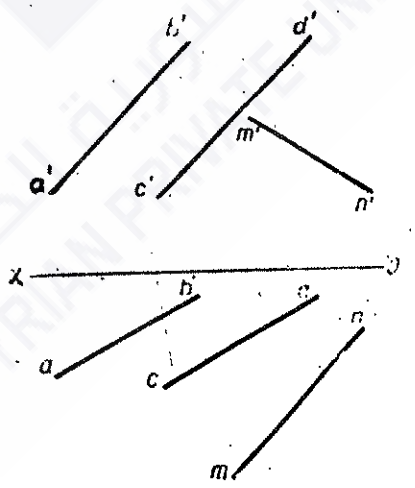
شكل رقم (٣٠٥)



شكل رقم (٣٠٤)

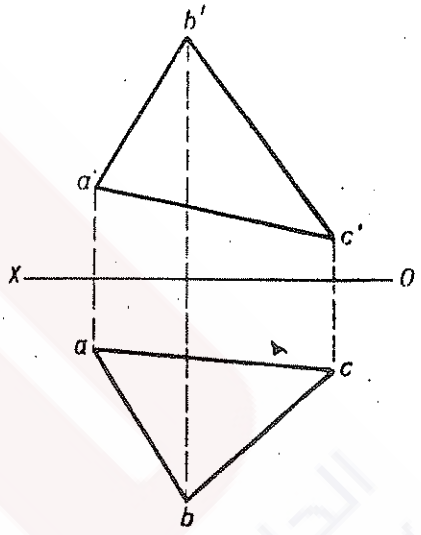


شكل رقم (٣٠٧)

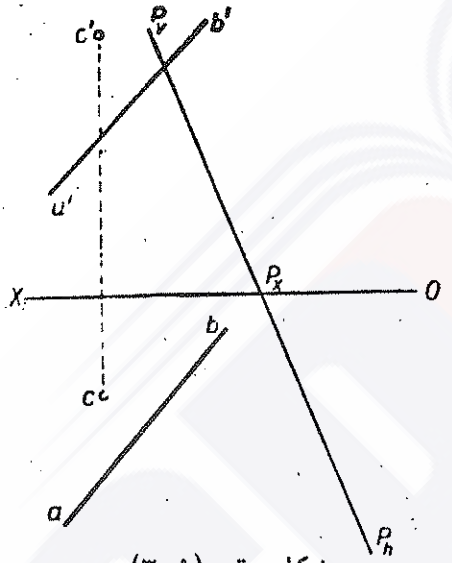


شكل رقم (٣٠٦)

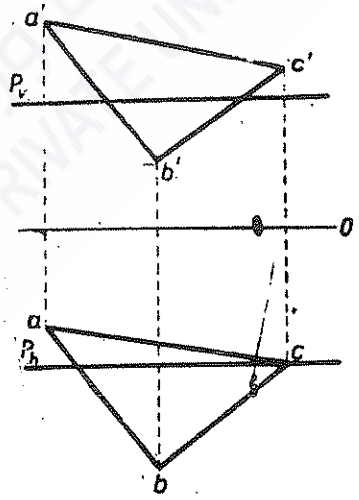
آ ـ بالمستقيم AB والنقطة C (الشكل ٣٠١) مسافة (٢٥) ملم .



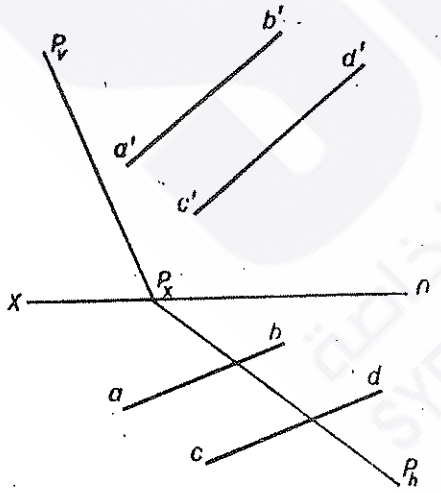
شكل رقم (٣٠٠)



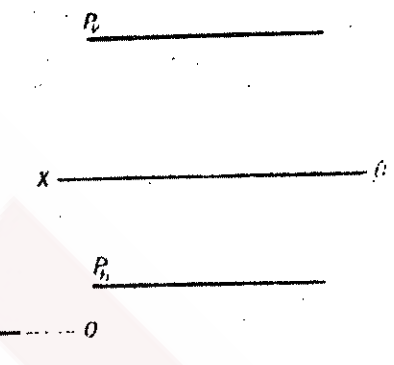
شكل رقم (٣٠١)



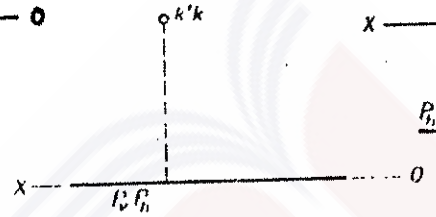
شكل رقم (٣٠٢)



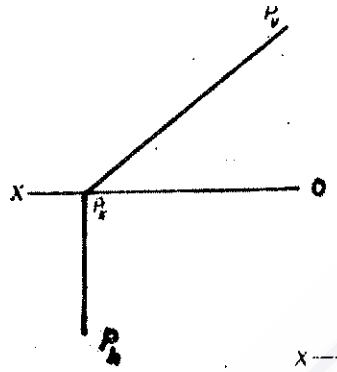
شكل رقم (٣٠٣)



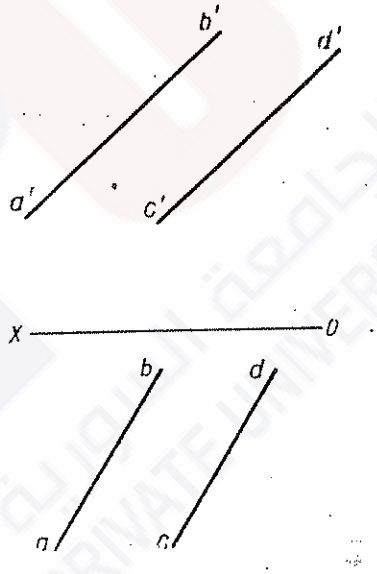
شكل رقم (٢٩٥)



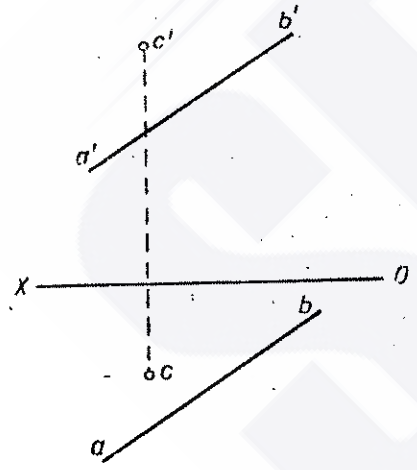
شكل رقم (٢٩٦)



شكل رقم (٢٩٧)



شكل رقم (٢٩٨)



شكل رقم (٢٩٩)

(الشكل ٣٠٢)، جـ ـ بالمستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ٣٠٣) المحل الهندسي للنقاط التي تبعد عن المستوي P (٢٥) ملم .

٤٣ـ حدد في المستوي P المحل الهندسي للنقاط التي تبعد عن المستوي المحدد :

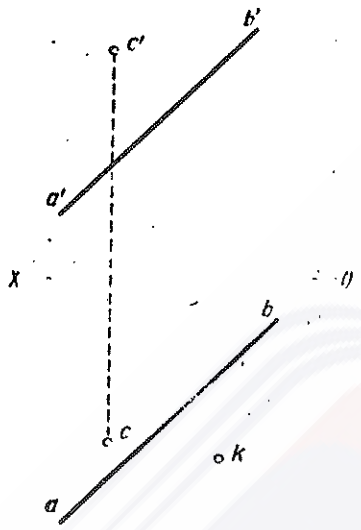
٤٠ـ حدد المحل الهندسي للنقـــاط الفراغية الواقعة على بعد (٢٠) ملم عن المستوي P (الأشكال ٢٩٣ ـ ٢٩٧) .

٤١ـ حدد المحل الهندسي للنقـــاط الفراغية التي تبعد مسافة (٣٠) ملم عن المستوي P المحدد :

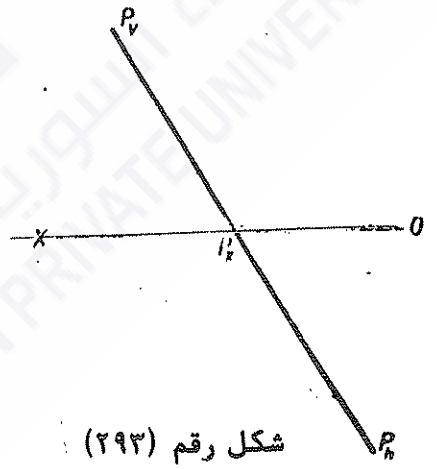
آ ـ بالمستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ٢٩٨) .

ب ـ بالمستقيم AB والنقطـــة C الشكل (٢٩٩) .

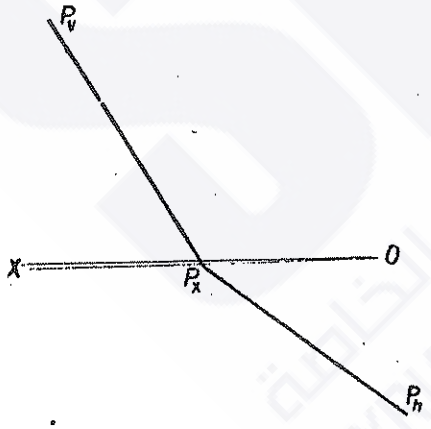
جـ ـ بالمثلث ABC (الشكل ٣٠٠) .



شكل رقم (٢٩٢)



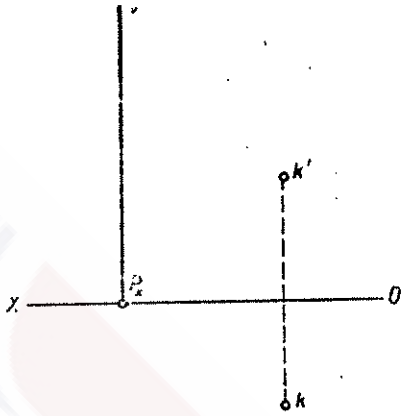
شكل رقم (٢٩٣)



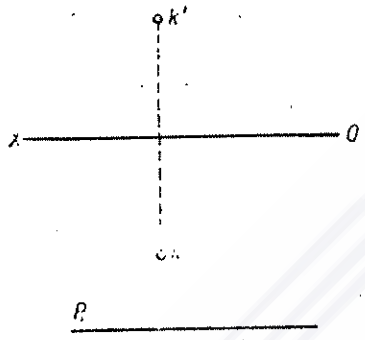
شكل رقم (٢٩٤)

٤١ ـ حدد في المستوي Q المحدد :

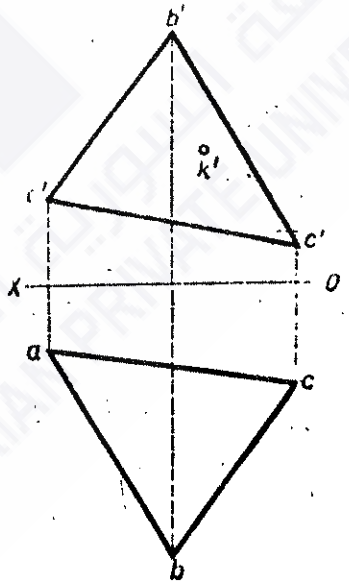
ـ بالمستقيم AB والنقطة C (الشكل ٣٠١)، ب ـ بالمثلـــث ABC



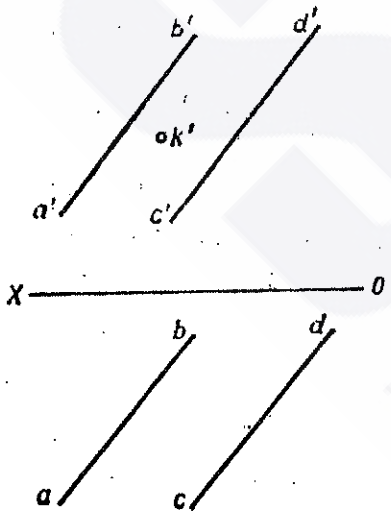
شكل رقم (٢٨٨)



شكل رقم (٢٨٩)



شكل رقم (٢٩٠)



شكل رقم (٢٩١)

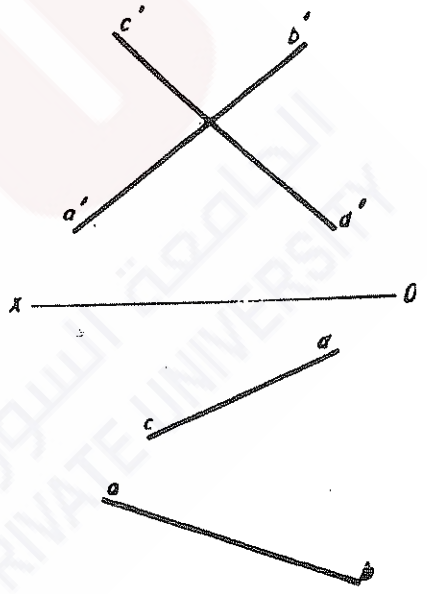
آ ـ بمستقيمين متوازيين AB و CD (الشكل ٢٨٤) .

ب ـ بمستقيم AB ونقطة C (الشكل ٢٨٥) .

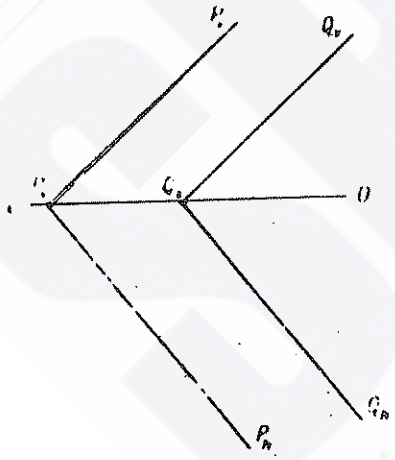
٣٦ـ حدد المسافة بين المستقيمين المتخالفين AB و CD (الشكل ٢٨٦) .

٣٧ـ حدد المسافة بين المستويين المتوازيين P و Q (الشكل ٢٨٧) .

٣٨ـ استكمل في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي الأثر الناقص للمستوي P اذا كانت المسافة بين النقطة K والمستوي (١٥) ملم (الشكلان ٢٨٨ و ٢٨٩) .



شكل رقم (٢٨٦)



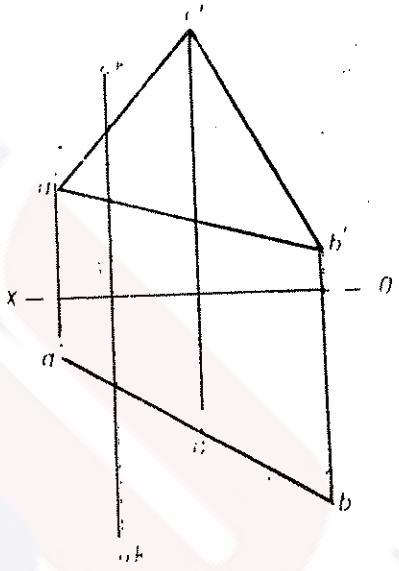
شكل رقم (٢٨٧)

١ـ أقم من النقطة K المنتمية الى المستوي P عمودا طوله (٤٠) ملم على المستوي اذا كان أحد مساقط النقطة K معلوما وكان المستوي محددا : آ ـ بالمثلث ABC (الشكل ٢٩٠) .

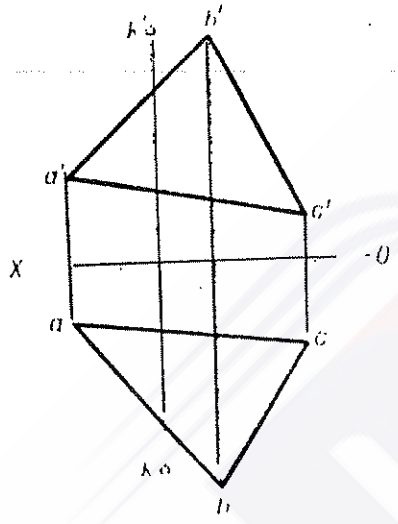
ب ـ بالمستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ٢٩١) .

٣٤ـ حدد بعد النقطة K عن مستوي المثلث ABC (الشكلان ٢٨٢و٢٨٣)

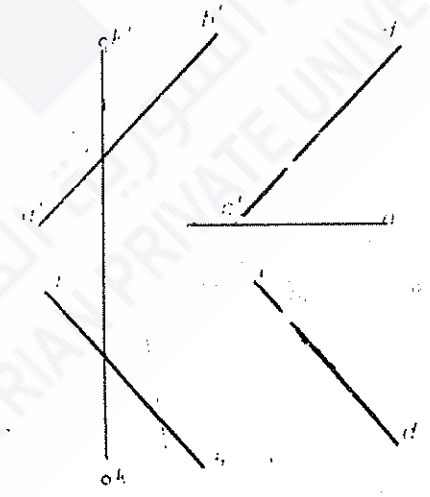
٣٥ـ حدد المسافة بين النقطة K والمستوي P المحدد :



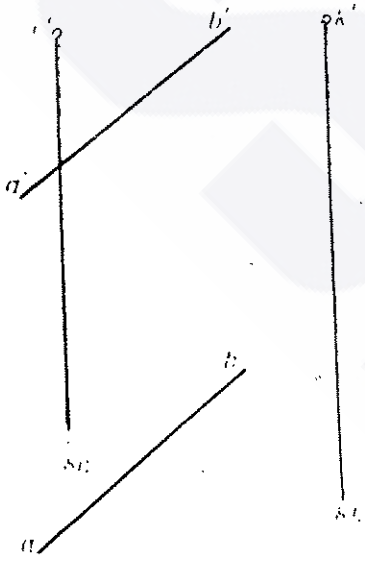
شكل رقم (٢٨٢)



شكل رقم (٢٨٣)



شكل رقم (٢٨٤)

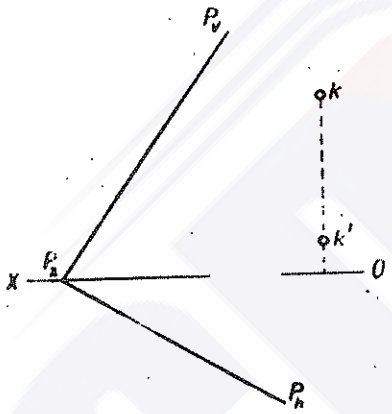


شكل رقم (٢٨٥)

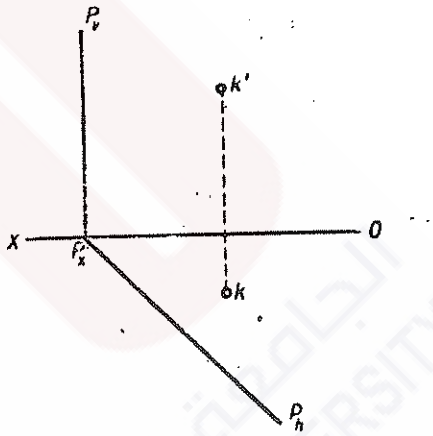
٣١ـ حدد على المستقيم CD نقطة تبعد بالتساوي عن نهايتي مقطع المستقيم AB (الشكل ٢٧٦) .

٣٢ـ حدد المسافة بين المستقيمين المتخالفين AB و CD (الشكل ٢٧٧) .

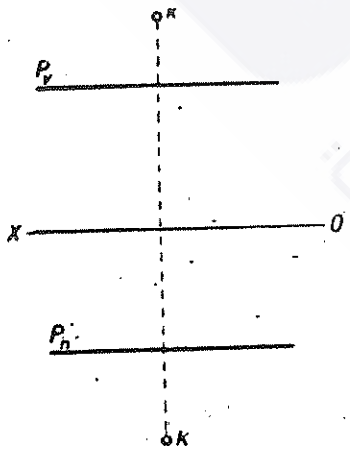
٣٣ـ حدد بعد النقطة K عن المستوي P (الأشكال ٢٧٨ ـ ٢٨١) .



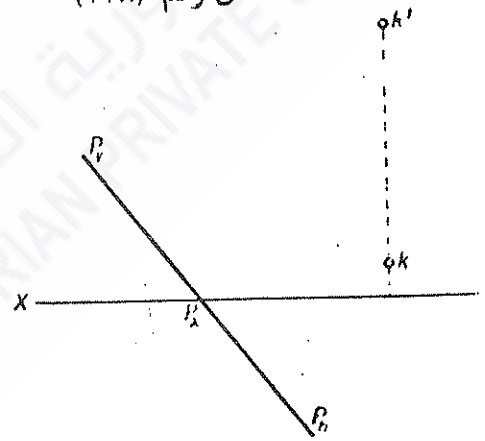
شكل رقم (٢٧٩)



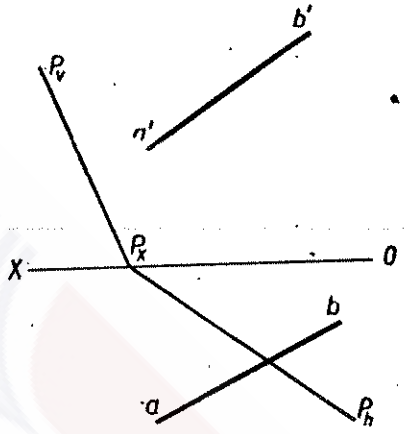
شكل رقم (٢٧٨)



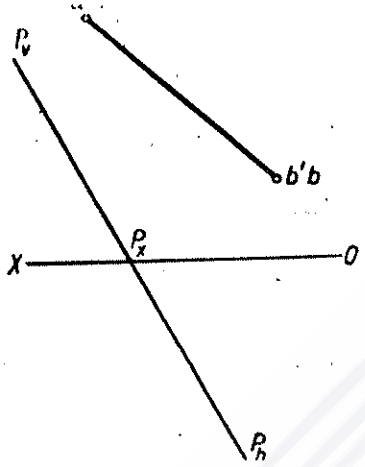
شكل رقم (٢٨١)



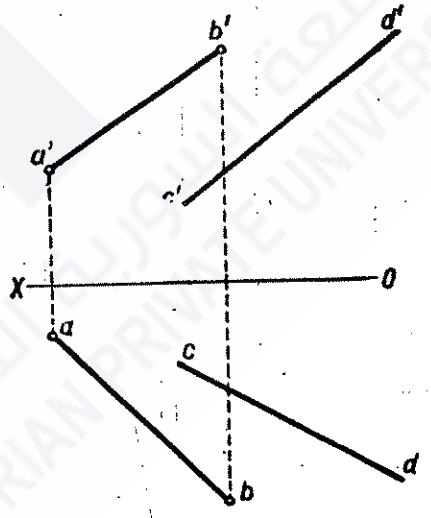
شكل رقم (٢٨٠)



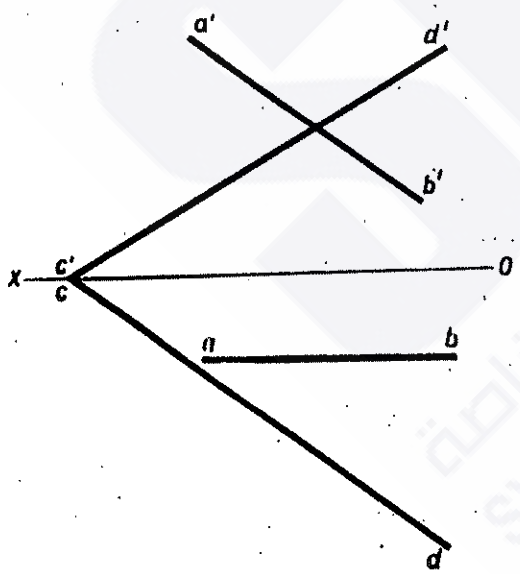
شكل رقم (٢٧٤)



شكل رقم (٢٧٥)

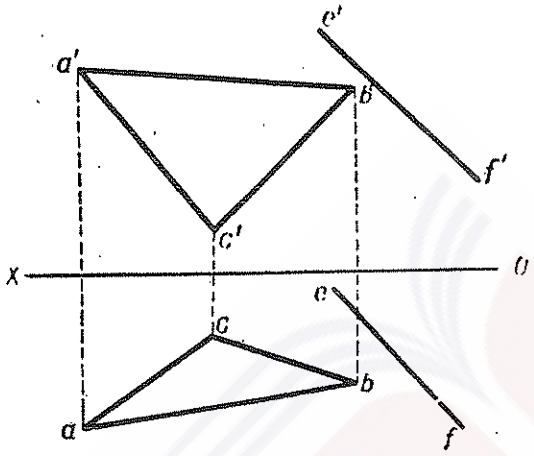


شكل رقم (٢٧٦)



شكل رقم (٢٧٧)

٢٦ـ مرر مستويـــــا P يوازي المستـــوي Q المحدد بالمستقيم AB والنقطة C بحيـــث يكون طول مقطـــــع المستقيم EF المحصور بين المستويين (٢٥) ملم (الشكل ٢٧١).



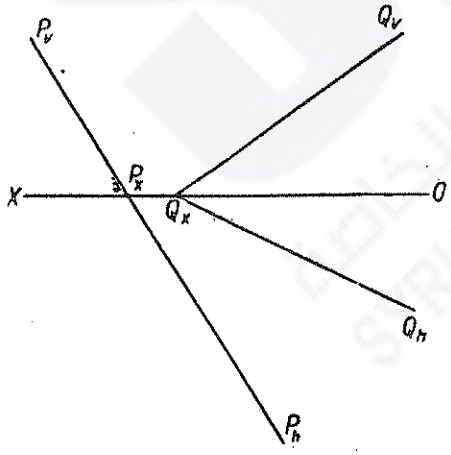
شكل رقم (٢٧٢)

٢٧ـ مرر مستويا P يوازي مستوي المثلث ABC بحيث يكون طول مقطع المستقيم EF المحصـــور بين المستويين مساويا (٣٠) ملم (الشكل ٢٧٢).

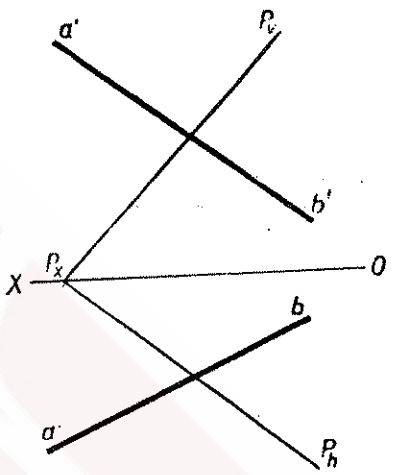
٢٨ـ حدد المحل الهندسي لنقاط منتمية للمستوي P تبعد مسافة (٤٠) ملم عن المستوي Q (الشكل ٢٧٣).

٢٩ـ حدد على المستقيـــم AB نقطة تبعد مسافة (٤٠) ملم عن المستوي P (الشكـــل ٢٧٤).

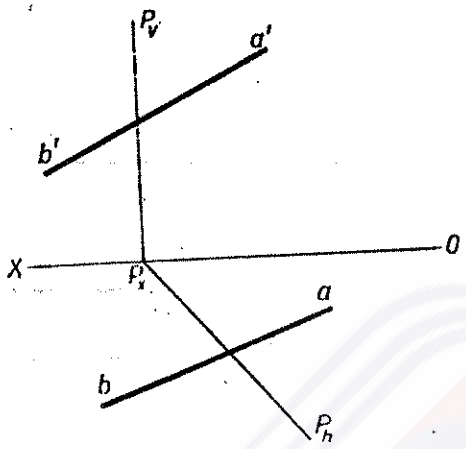
٣٠ـ حدد المحل الهندسي لنقاط منتمية للمستوي P تبعـد بمسافات متساوية عـــــن نهايتي مقطع المستقيم AB (الشكل ٢٧٥).



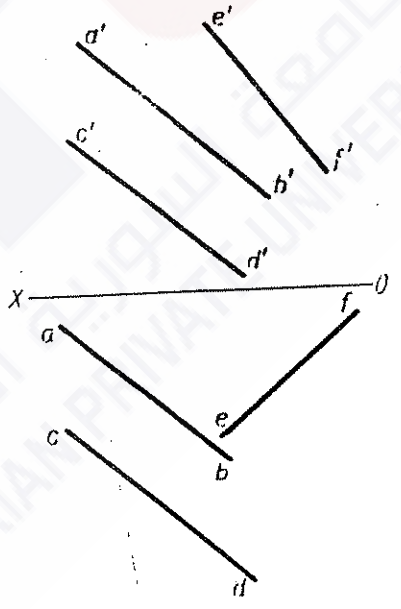
شكل رقم (٢٧٣)



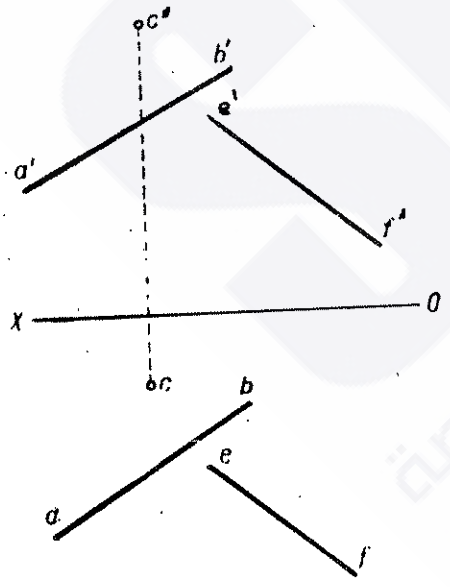
شكل رقم (٢٦٨)



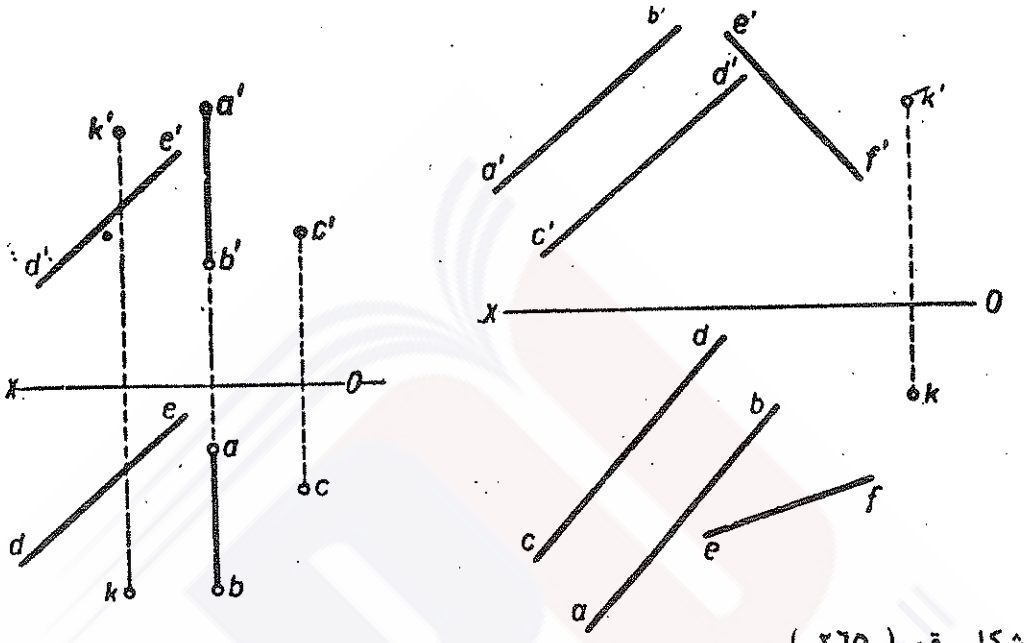
شكل رقم (٢٦٩)



شكل رقم (٢٧٠)

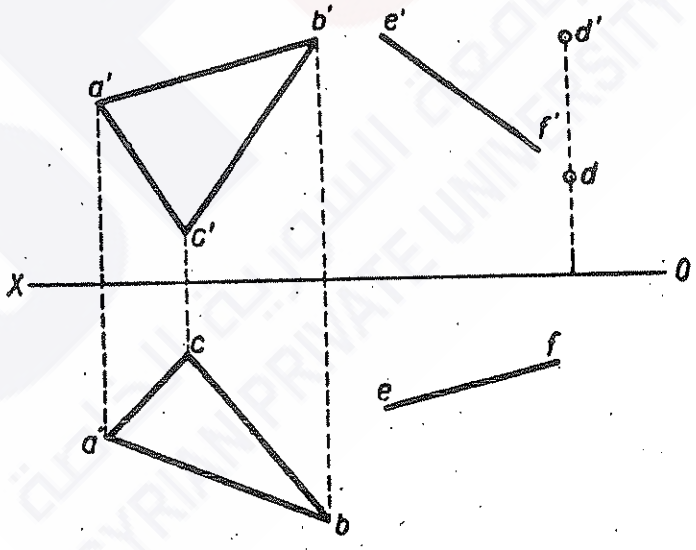


شكل رقم (٢٧١)



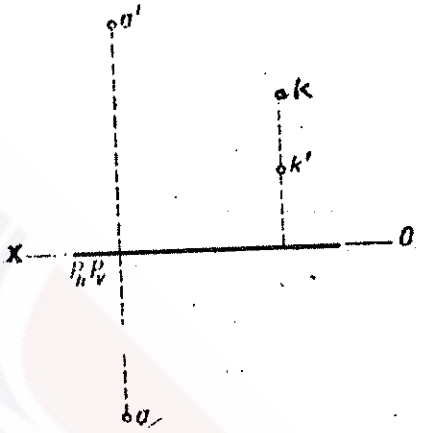
شكل رقم (٢٦٥)

شكل رقم (٢٦٦)

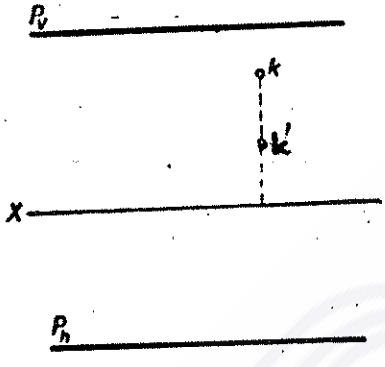


شكل رقم (٢٦٧)

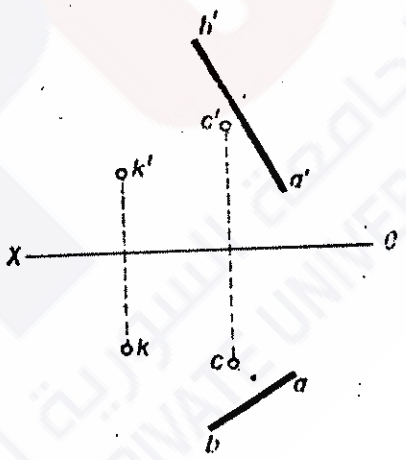
٢٥ـ مرر مستويا P يوازي المستوي Q المحدد بالمستقيمين المتوازيين CD و AB بحيث يكون طول مقطع المستقيم EF المحصور بين المستويين مساويا (٣٠) ملم (الشكل ٢٧٠) .



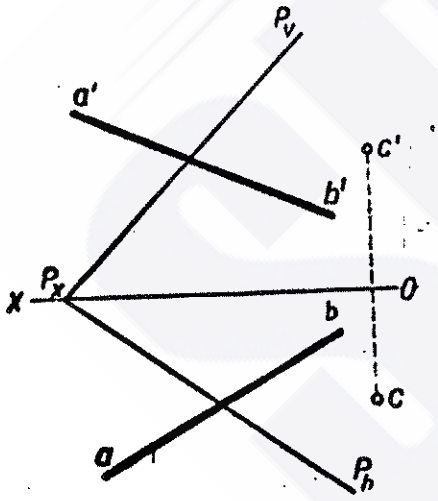
شكل رقم (٢٦١)



شكل رقم (٢٦٢)



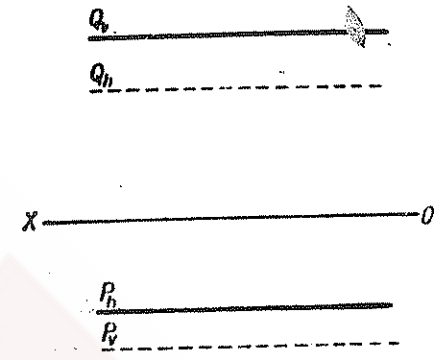
شكل رقم (٢٦٣)



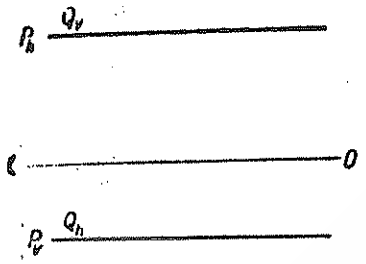
شكل رقم (٢٦٤)

٢٣ـ مرر من النقطة D مستقيما يقطع المستقيم EF ويوازي مستوي المثلث ABC (الشكل ٢٦٧) .

٢٤ـ مرر مستويا Q يوازي المستوي P بحيث يكون بعد كل من مقطع المستقيم AB المحصور بينهما (٣٠) ملم (الشكل ٢٦٨ ، ٢٦٩) .



شكل رقم (٢٥٨)

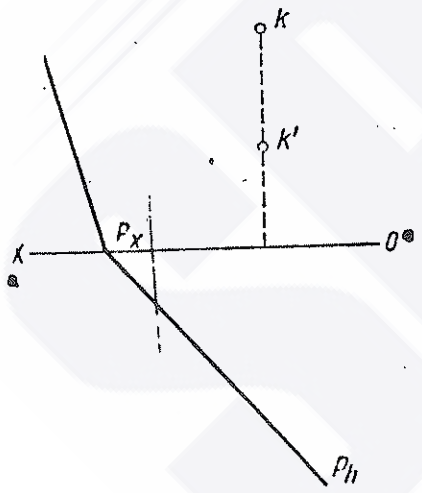


شكل رقم (٢٥٩)

آ ـ يمر من خط الأرض والذي تنتمي النقطة A اليه (الشكل ٢٦١) .

ب ـ يوازي خط الأرض (الشكل ٢٦٢) .

استخدام لحل المسألة طريقتـــــي التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي والثلاثي .



شكل رقم (٢٦٠)

١٩ـ مرر من النقطة K مستويا يـوازي المستوي المحدد بالمستقيـــم AB والنقطة C (الشكل ٢٦٣) .

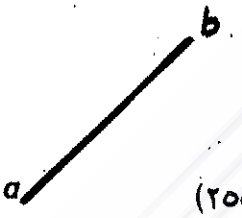
٢٠ـ مرر من النقطة C مستقيما يقطع المستقيم AB ويوازي المستـــوي P الشكل (٢٦٤) .

٢١ـ مرر من النقطة K مستقيما يقطع المستقيم EF ويوازي المستـــــوي المحدد بالمستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ٢٦٥) .

٢٢ـ مرر من النقطة C مستقيما يقطع المستقيم AB ويوازي المستـــــوي المحدد بالمستقيم DE والنقطة K (الشكل ٢٦٦) .

١٥ــ مرر من المستقيمين AB و CD مستويين P و Q متوازيين فيما بينهما (الشكلين ٢٥٦ و ٢٥٧) .

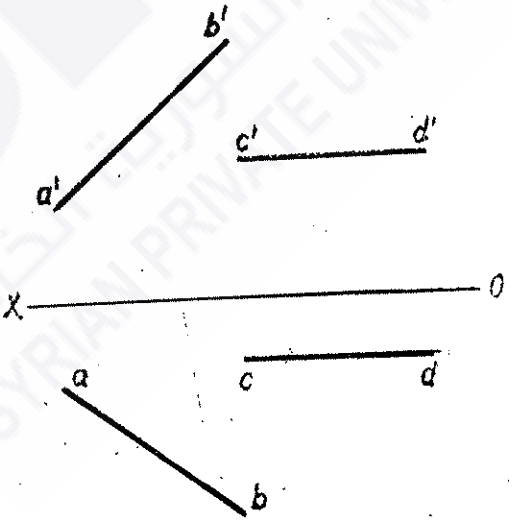
١٦ــ هل المستويان P و Q (الشكلين ٢٥٨ و ٢٥٩) متوازيان أم لا ؟ تحقق من ذلك في التعبيرين الاسقاطيين المستويين الثنائي والثلاثي .



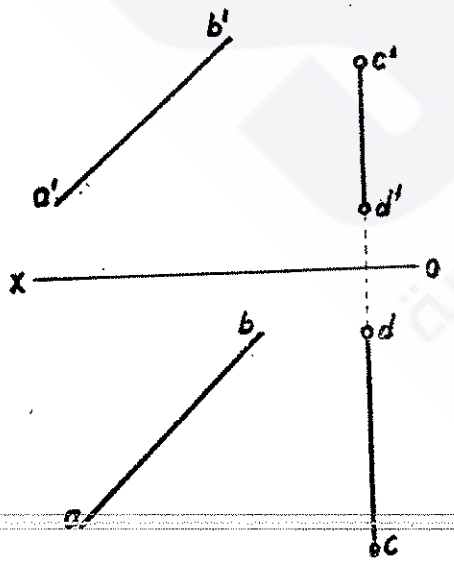
شكل رقم (٢٥٥)

١٧ــ ارسم أثري المستوي المار من النقطة K والموازي للمستوي P (الشكل ٢٦٠) .

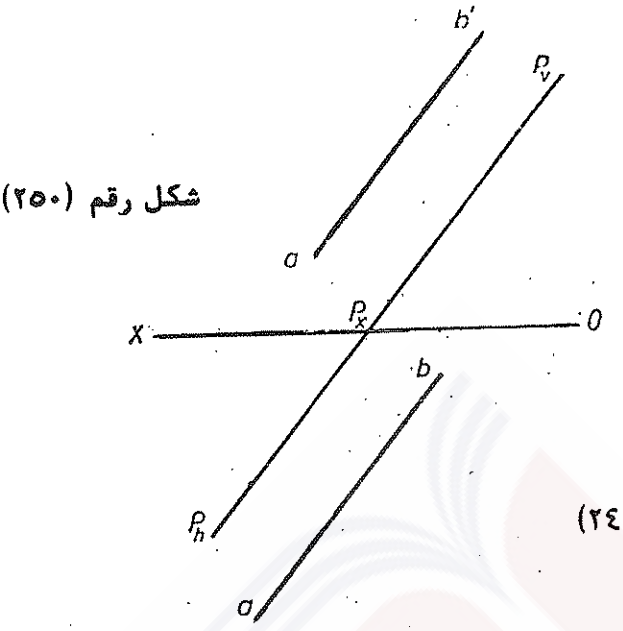
١٨ــ ارسم آثار المستوي Q المار من النقطة K والموازي للمستوي P الذي :



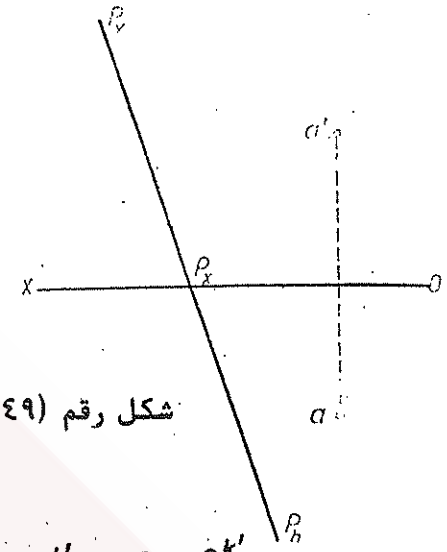
شكل رقم (٢٥٦)



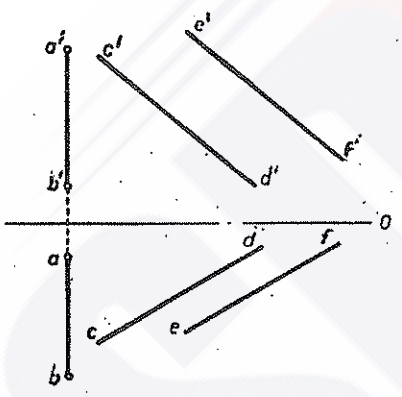
شكل رقم (٢٥٧)



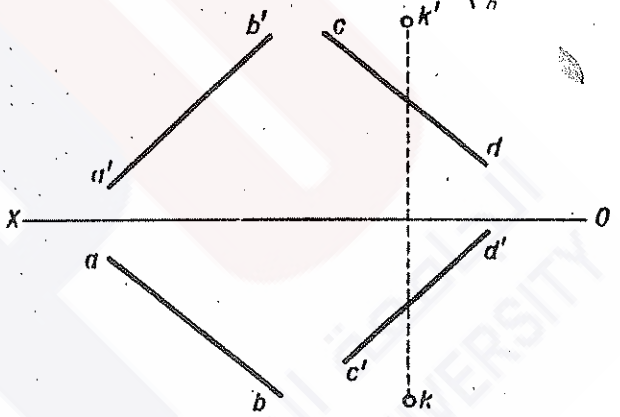
شكل رقم (٢٥٠)



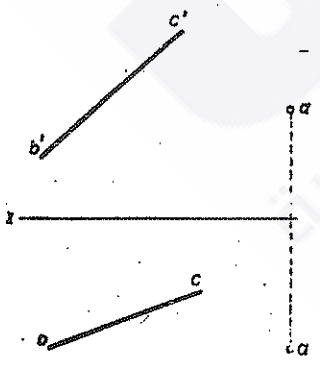
شكل رقم (٢٤٩)



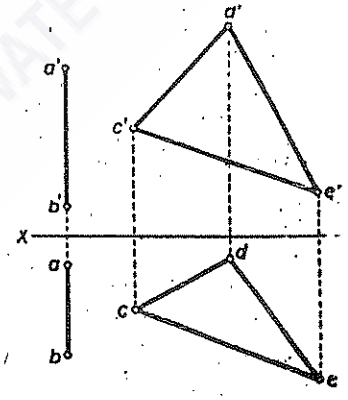
شكل رقم (٢٥٢)



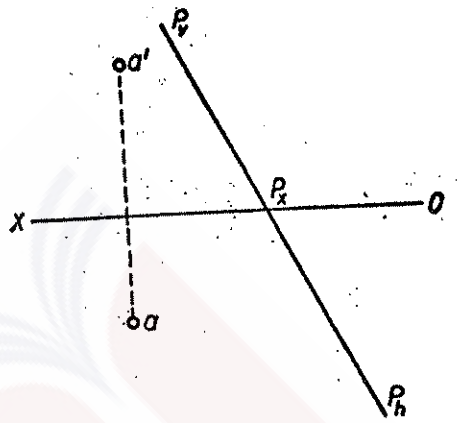
شكل رقم (٢٥١)



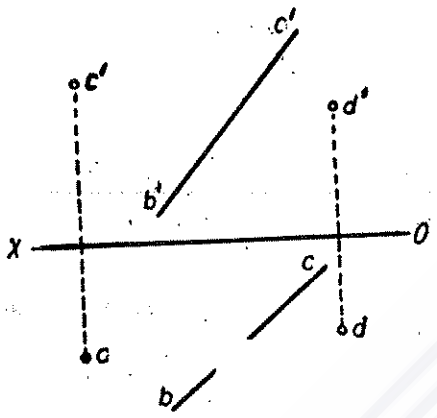
شكل رقم (٢٥٤)



شكل رقم (٢٥٣)



شكل رقم (٢٤٥)

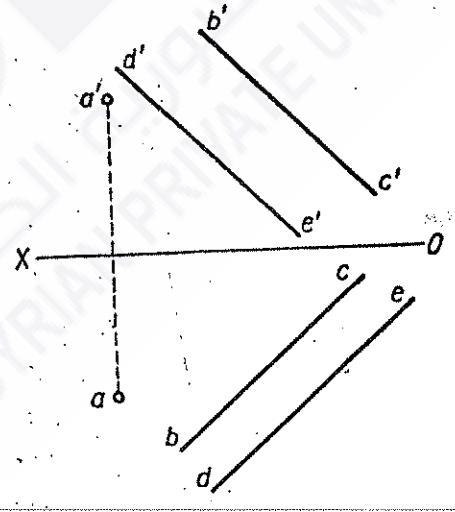


شكل رقم (٢٤٦)

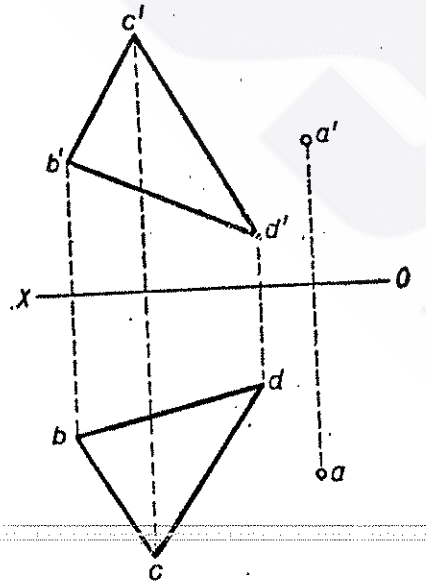
١٢ـ هل يوازي المستقيم AB مستوي المثلث CDE (الشكل ٢٥٣) ؟

١٣ـ مرر من النقطة A المستوي Q الذي يعامد مستوي الاسقاط الأفقي ويوازي المستقيم BC (الشكل ٢٥٤) .

١٤ـ مرر من المستقيم AB المستوي P الذي يوازي المستقيم CD (الشكل ٢٥٥) .



شكل رقم (٢٤٧)

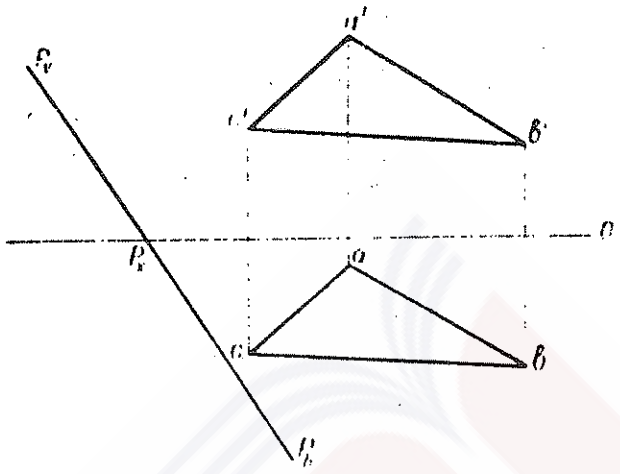


شكل رقم (٢٤٨)

١٠ـ هـل يـوازي المستقيم AB المستوي P المحدد :

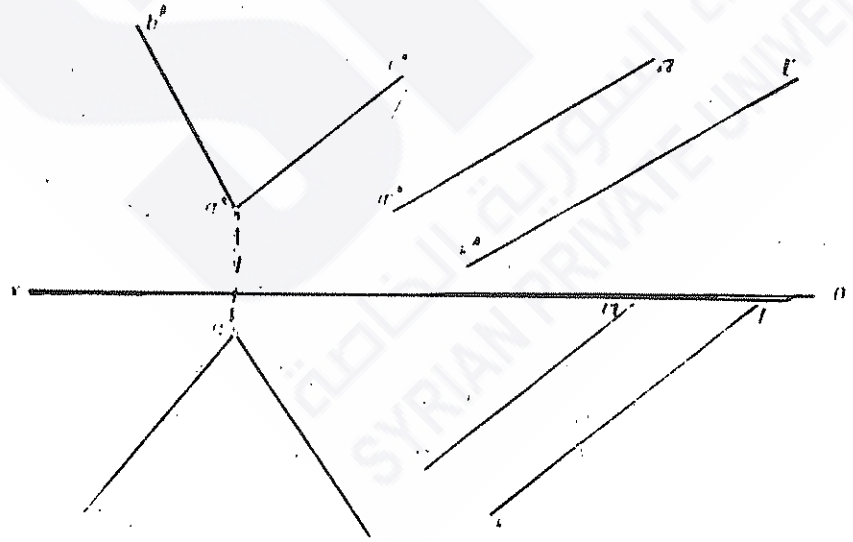
آ ـ بأثريه (الشكل ٢٥٠) ؟

ب ـ بالمستقيم CD والنقطة K الشكل ٢٥١) ؟

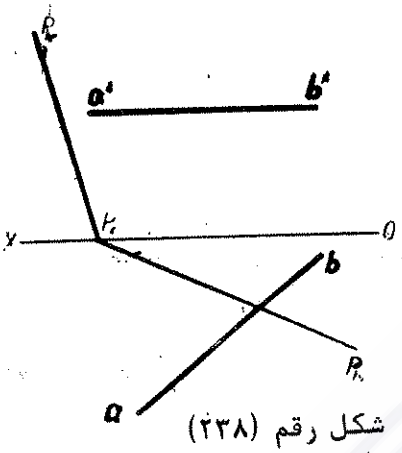


شكل رقم (٢٤٣)

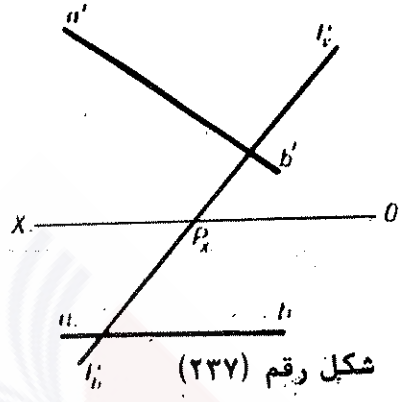
١١ـ هل يوازي المستقيم AB المستوي P المحدد بالمستقيمين المتوازي CD و EF (الشكل ٢٥٢) ؟



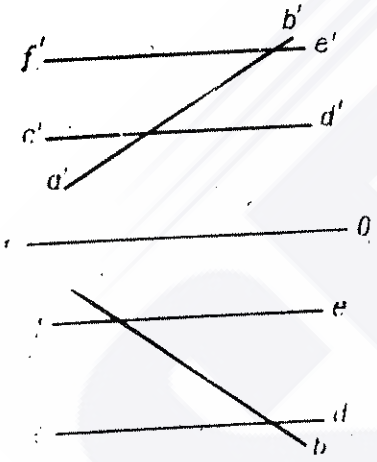
شكل رقم (٢٤٤)



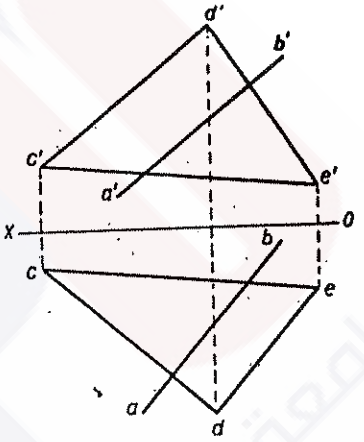
شكل رقم (٢٣٨)



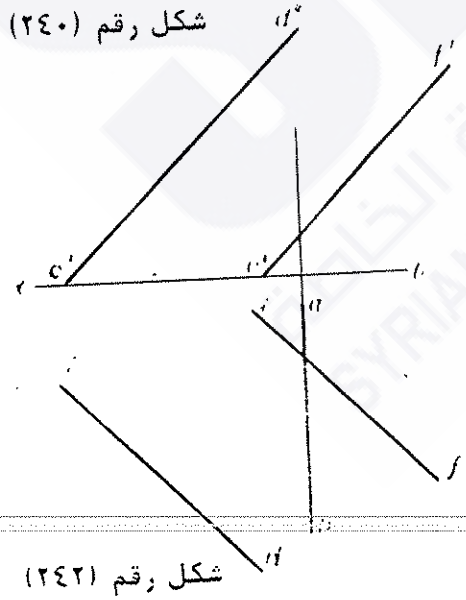
شكل رقم (٢٣٧)



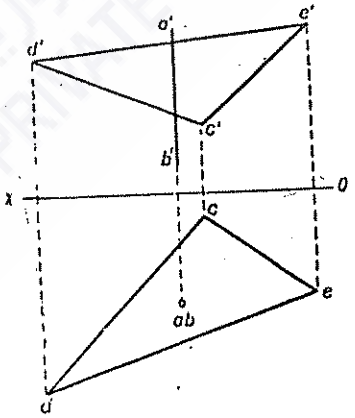
شكل رقم (٢٤٠)



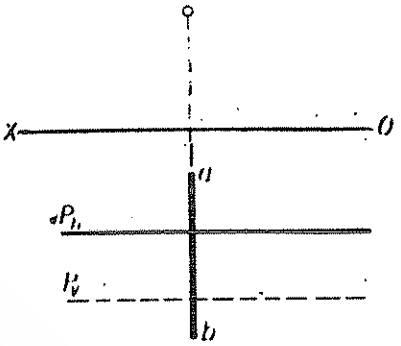
شكل رقم (٢٣٩)



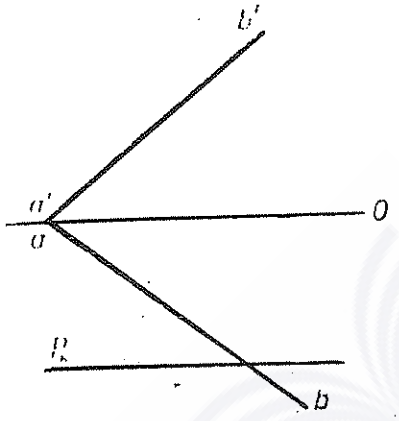
شكل رقم (٢٤٢)



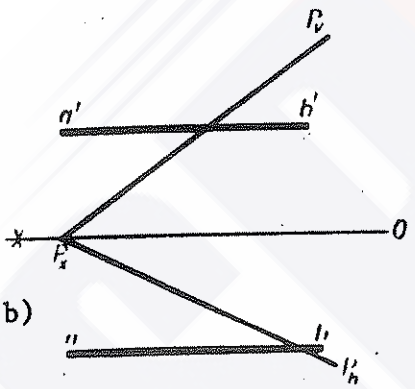
شكل رقم (٢٤١)

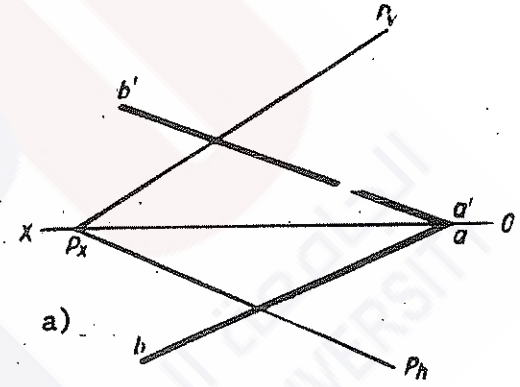


شكل رقم (٢٣٢)

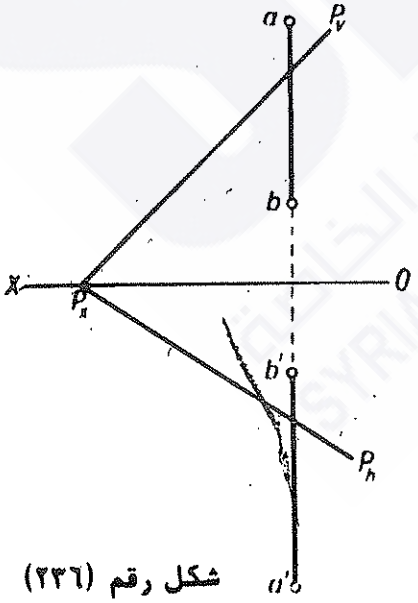


شكل رقم (٢٣٣)

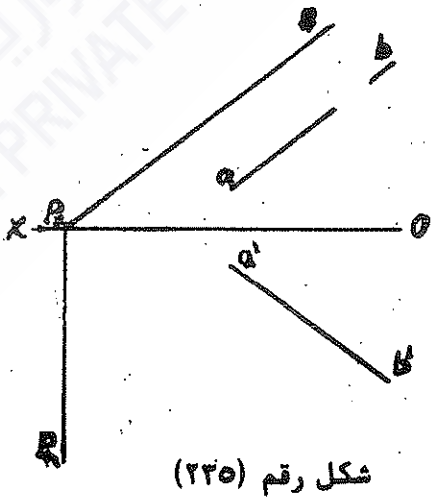




شكل رقم (٢٣٤)

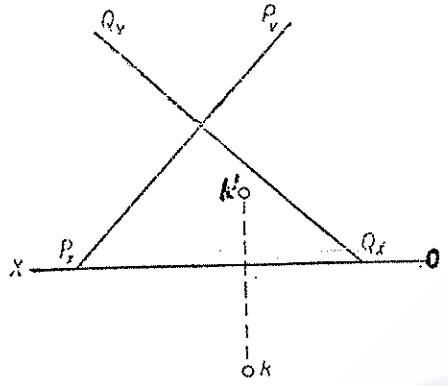


شكل رقم (٢٣٦)



شكل رقم (٢٣٥)

ارسم الأثرين الأفقيين للمستويين المتقاطعين P و Q . اذا كان أثراهما الأماميان والنقطة K الواقعة على خط تقاطعهما (الشكلان ٢٣٠ و ٢٣١) معلومين .



شكل رقم (٢٣١)

٢ـ حدد نقطة تقاطع المستقيم AB والمستوي P (الأشكال ٢٣٢ـ ٢٣٨) .

٤ـ حدد نقطة تقاطع AB والمستوي P المحدد بغير آثاره (الأشكال ٢٣٩ـ ٢٤٢) .

٥ـ حدد خط تقاطع مستوي المثلث ABC مع المستوي P وحدد مناطق الفراغ التي يمر منها هذا الخط (الشكل ٢٤٣) .

٦ـ حدد خط تقاطع المستوي المحدد بالمستقيمين المتوازيين KL و MN مع المستوي المحدد بالمستقيمين المتقاطعين AB و AC وحدد مناطق الفراغ التي يمر منها هذا الخط (الشكل ٢٤٤) .

٧ـ مرر من النقطة A مستقيما يوازي المستوي P (الشكل ٢٤٥) .

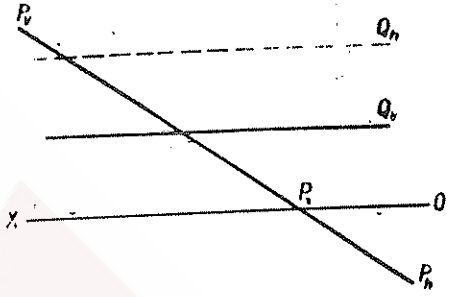
٨ـ مرر من النقطة A مستقيما يوازي المستوي المحدد :

آ ـ بالمستقيم BC والنقطة D (الشكل ٢٤٦) .

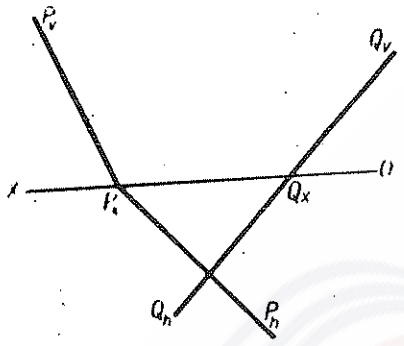
ب ـ بالمستقيمين المتوازيين BC و DE (الشكل ٢٤٧) .

جـ ـ بالمثلث BCD (الشكل ٢٤٨) .

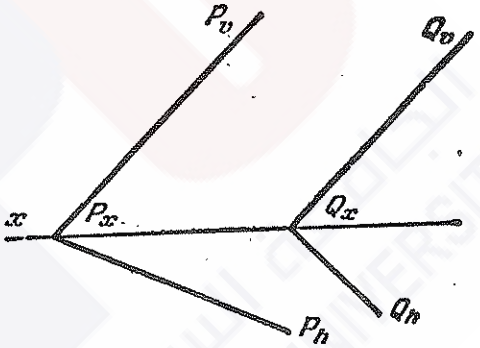
٩ـ مرر من النقطة A مستقيما يوازي المستوي P ويميل بزاوية واحدة عن مستويي الاسقاط H و V (الشكل ٢٤٩) .



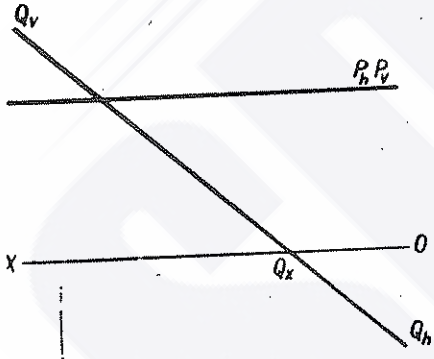
شكل رقم (٢٢٥)



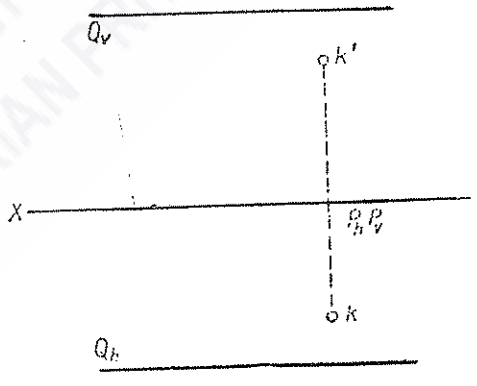
شكل رقم (٢٢٦)



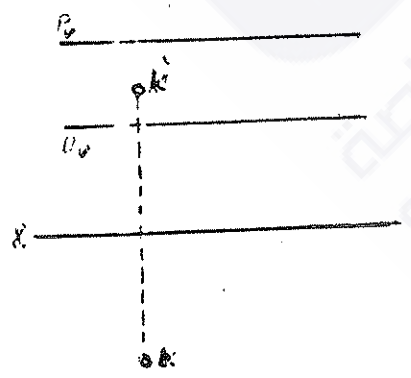
شكل رقم (٢٢٧)



شكل رقم (٢٢٨)



شكل رقم (٢٢٩)



شكل رقم (٢٣٠)

يوازيان AB و AD على التوالي فيتقاطعان في النقطة C(c,c') وبذلك نحصل (الشكل ٢٢٠ هـ) على مسقطي متوازي الأضلاع الأمامي a'b'c'd' والأفقي abcd .

* **ملاحظة** : (عند الحل الصحيح تقع c و c' على خط تداع واحد يعامد خط الأرض .

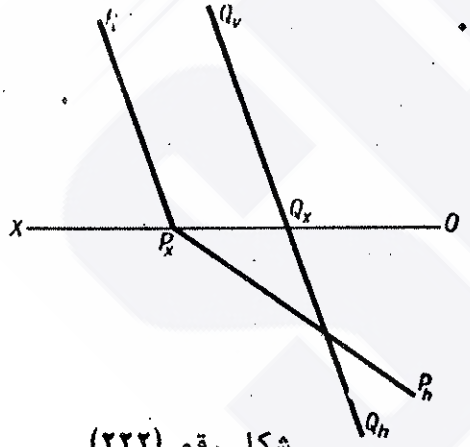
ثانيا ـ تمارين تطبيقية :

١ـ حدد خط تقاطع المستويين P و Q :

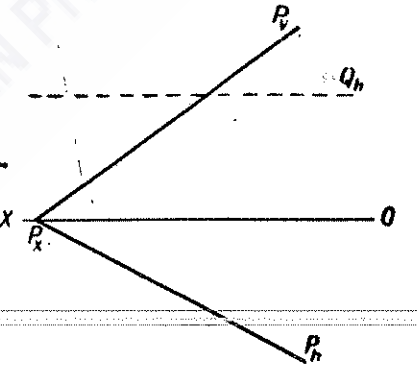
آ ـ دون استخدام مستويات مساعدة (الأشكال ٢٢١ ـ ٢٢٨) .

ب ـ باستخدام مستويات مساعدة (الأشكال ٢٢٩ ـ ٢٣١) .

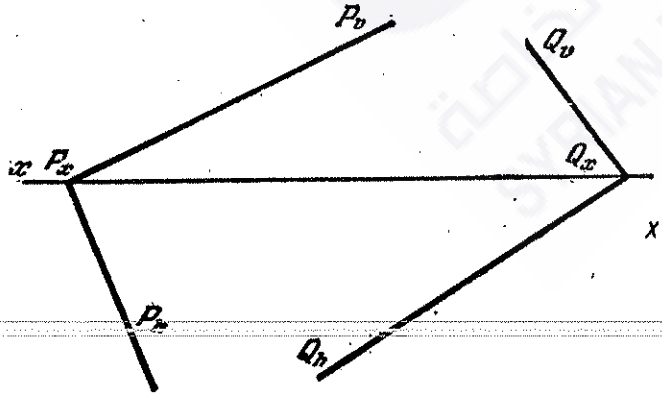
شكل رقم (٢٢١)



شكل رقم (٢٢٢)



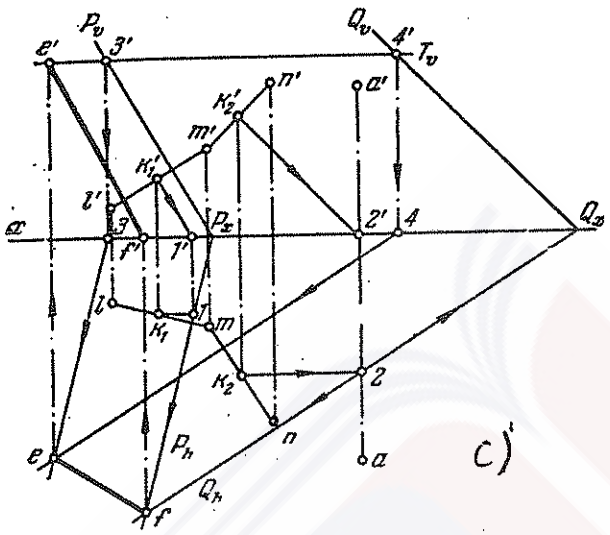
شكل رقم (٢٢٣)



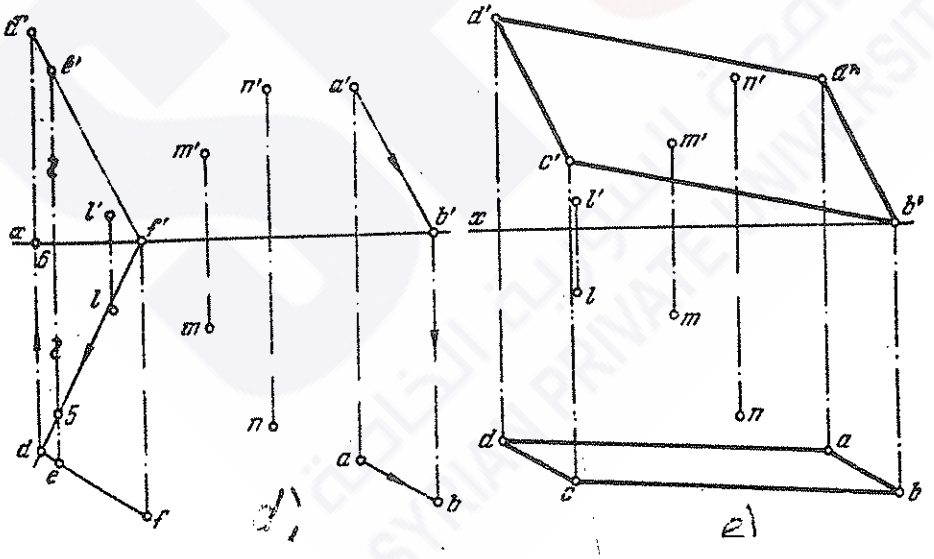
شكل رقم (٢٢٤)

الحل الصحيح يكون (d'6 = d 6

من النقطة A(a,a') نرسم مستقيما يـــوازي EF(ef,e'f') فيقطع المستوي H في النقطة B(b,b') . لهذا الغرض نرســـم e'f' // a'b' فيقطع خـــط الأرض في النقطة b' ومـــن a نرسم مستقيما يوازي ef فيقطع خط التداعي النازل من b' في



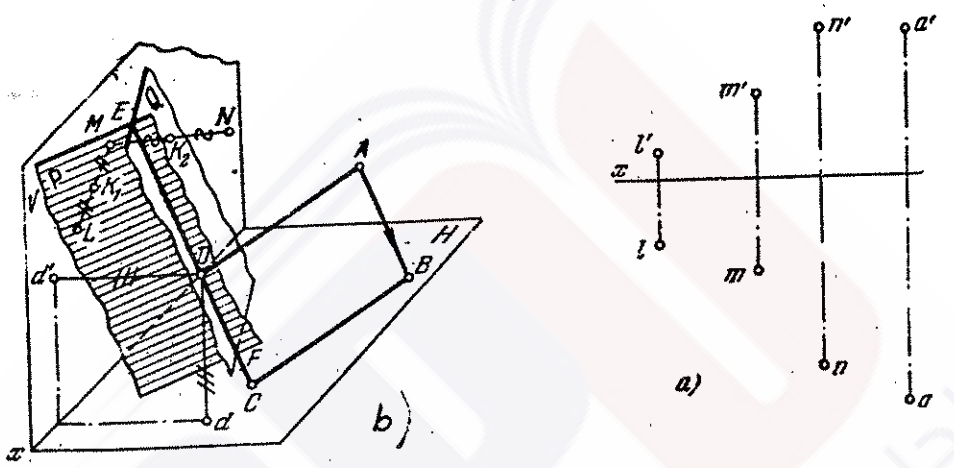
تابع شكل رقم (٢٢٠)



تابع شكل رقم (٢٢٠)

النقطة b . وبذلك نكون قد حصلنا على ثلاثة رؤوس من رؤوس متـــــوازي الأضلاع . نصل AD(ad,a'd') ومن D(d,d') و B(b,b') نرسم مستقيمين

٥ـ لدينا النقاط A و L و M و N (الشكل ٢٢٠ آ) . ارسم متوازي الأضلاع ABCD الذي يقع رأسه B على المستوي H وضلعه CD على المستقيم الواقع على بعد واحد عن النقاط L و M و N ورأسه D يقع على بعد واحد عن مستويي الاسقاط V و H .

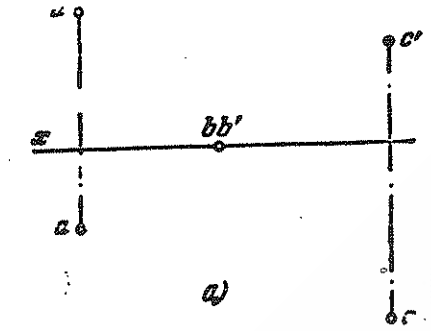


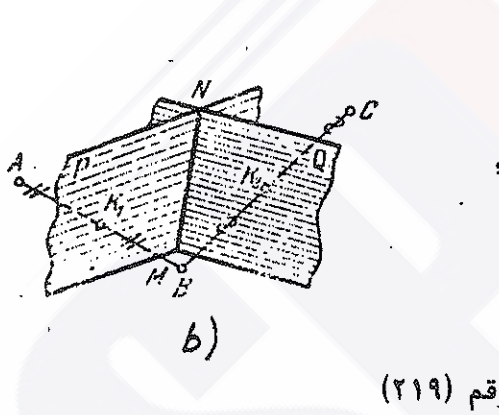
شكل رقم (٢٢٠)

الحـــل : من معطيات السؤال نلاحظ أن الضلع CD يقع على المستقيم EF (الشكل ٢٢٠ ب) الذي يمثل المحل الهندسي للنقاط الواقعة على بعد واحد عن النقاط L و M و N ولهذا تحديد المستقيم EF يتم بالطريقة المتبعة في المثال السابق (٥١) ذاتها باعتباره خط تقاطع المستويين P و Q العموديين على المقطعين LM و MN والمنصفين لهما (الشكل ٢٢٠ جـ) . لتحديد النقطة D التي تقع على بعد واحد عن المستويين H و V نمرر من النقطة f' مستقيما f'5 يميل بالنسبة لمحور OX بنفس زاوية ميل f'e' عنه (الشكل ٢٢٠ د) فنحصل من تقاطعه مع fe على نقطة d المسقط الأفقي للنقطة D . نحدد مسقطها الأمامي d' على f'e' (عند

الحـــل : المحل الهندسي المطلوب

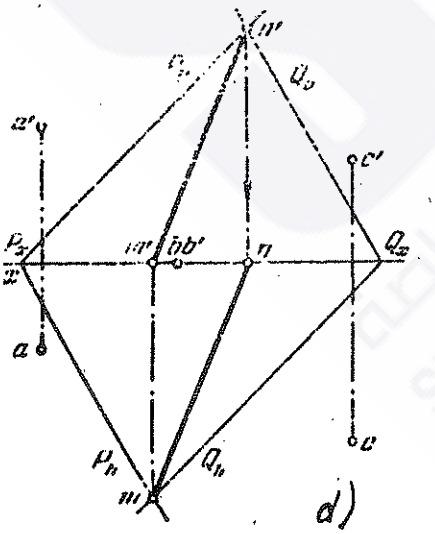
يكون خط MN تقاطع المستويين P و Q (الشكل ٢١٩ ب) العموديين على مقطعي المستقيمين AB و BC على التوالي والمارين من النقطتين K_1 و K_2 المنصفتين لهذين



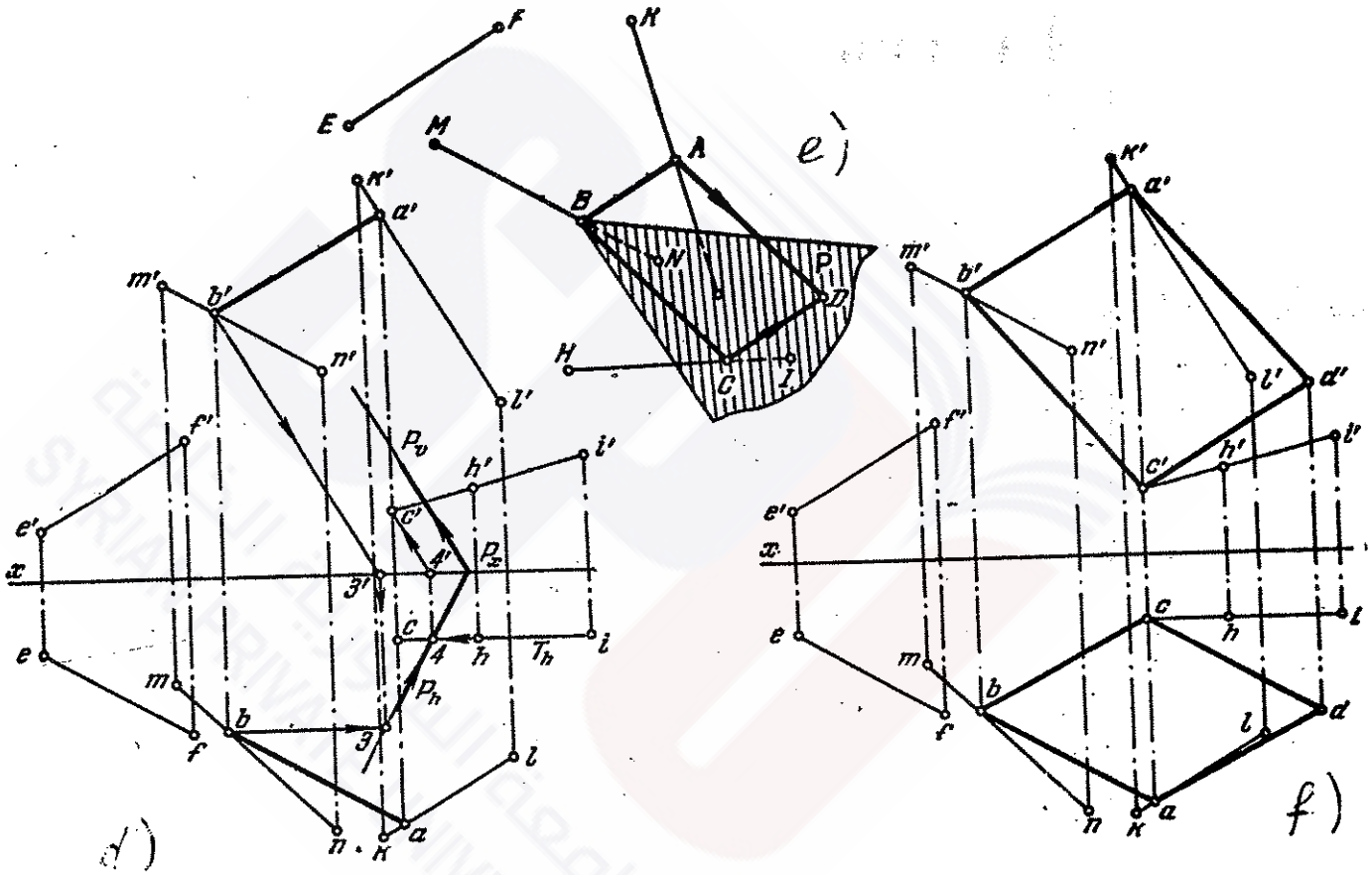


شكل رقم (٢١٩)

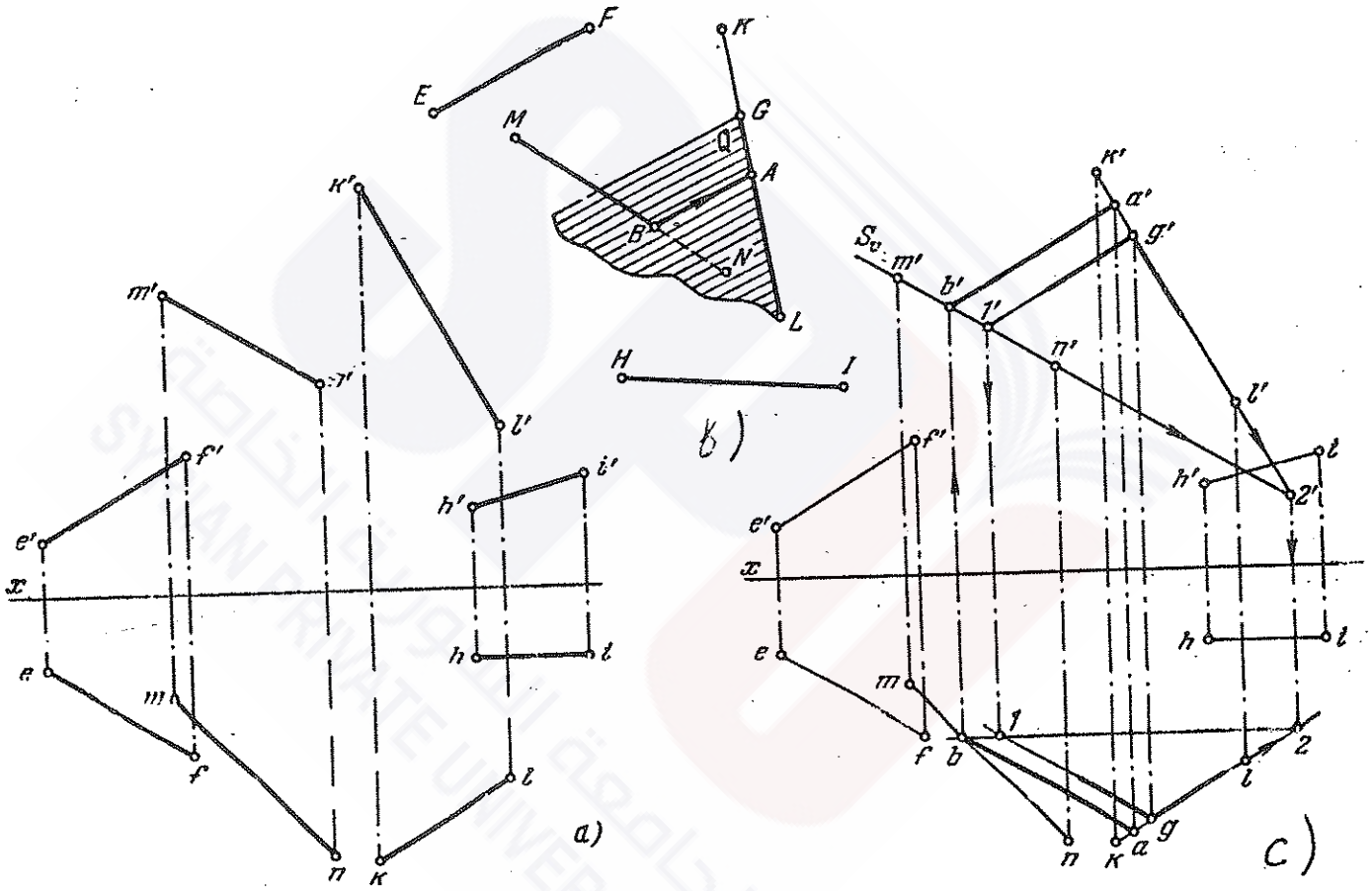
المستقيمين ٠ نحدد هذين المستويين بآثارهما (الشكل ٢١٩ جـ) ٠ من تقاطع الآثار المتماثلة (الشكل ٢١٩ د) P_h مع Q_h و P_v مع Q_v نحدد نقطتي M و N المحددتين لخط تقاطع المستويين ٠ لهذا يكون المستقيم MN هو المحل الهندسي المطلوب ٠



تابع شكل رقم (٢١٩)



تابع شكل رقم (٢١٨)



شكل رقم (٢١٨)

بأثره R_v المنطبق على a'b' ونحدد خط تقاطعه (2 - 1) مع المستوي Q . من تقاطع ab و(2 - 1) نحدد k المسقط الأفقي لنقطة K تقاطع المستقيم AB مع المستوي Q . نحدد مسقطها الأمامي k' على a'b' .

٣- نمرر من النقطة K(k,k') مستقيما KM(km,k'm') يوازي المستقيم EF (الشكل ٢١٧ هـ) فيقطع المستقيم CD في النقطة M(m,m') .

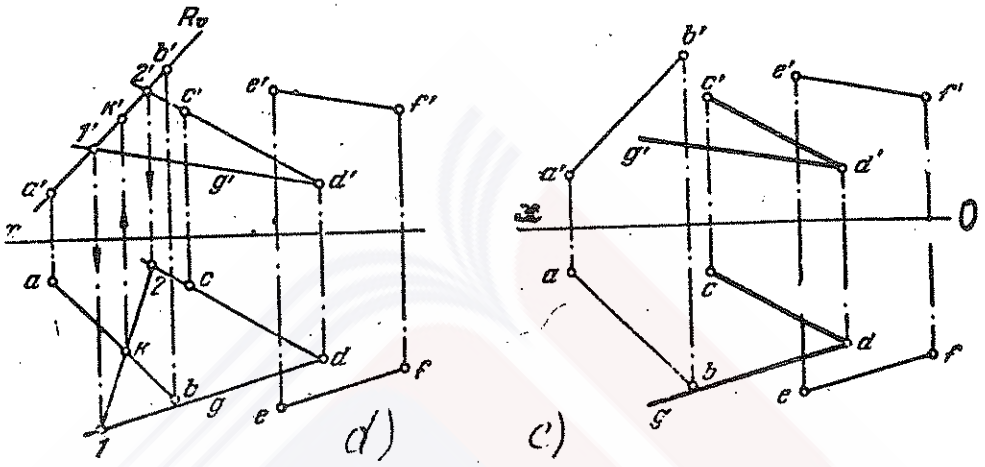
٥٠- ارسم مسقطي المستطيل ABCD الذي يكون ضلعه AB موازيا للمستقيم EF وتقع رؤوسه : A على المستقيم KL ، و B على المستقيم MN ، و C على المستقيم HI (الشكل ٢١٨ آ) .

الحل : من معطيات السؤال نلاحظ أن الضلع AB يقطع KL و MN ويوازي EF (نفس معطيات المثال السابق) . لهذا اذا مررنا من نقطة (G) واقعة على المستقيم KL مستقيما يوازي المستقيم EF (الشكل ٢١٨ ب) فاننا نحصل على المستوي Q الموازي للمستقيم EF . بعد ذلك ، كما في المثال السابق ، نحدد نقطة B(b,b') تقاطع المستوي Q والمستقيم MN (الشكل ٢١٨ جـ) ، ومن النقطة B نرسم مستقيما يوازي EF فيقطع المستقيم KL في النقطة A(a,a') . وبما أن الضلعين AB و BC متعامدان ، فاننا نمرر من النقطة B (الشكل ٢١٨ د ، هـ) مستويا P حامد الضلع AB ونحدد نقطة C(c,c') تقاطع المستقيم HI مع هذا المستوي . من النقطتين A و C (الشكل ٢١٨ د ، و) نمرر مستقيمين يوازيان الضلعين BC و AB حتى يتقاطعان في النقطة D(d,d') .

٦٠- عين المحل الهندسي للنقاط الواقعة على بُعد واحد من النقاط A و B و C (الشكل ٢١٩ آ) .

ب ـ نحدد نقطة K تقاطع المستقيم AB مع المستوي Q .

جـ ـ من النقطة K نرسم مستقيما KM يوازي المستقيم EF .

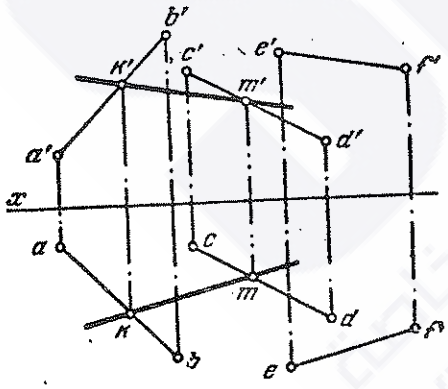


تابع شكل رقم (٢١٧)

لتنفيذ هذه الخطة نقوم بالعمليات التالية (الشكل ٢١٧ جـ) :

- نرسم من النقطة D(d,d') مستقيما DG(dg,d'g') يوازي المستقيم EF(ef,e'f') فنحصل على المستوي Q المحدد بالمستقيمين المتقاطعين CD و DG والموازي للمستقيم EF .

نحدد نقطة K تقاطع المستقيم AB مع المستوي Q (الشكل ٢٥٠ د) فنمرر من المستقيم AB مستويا اسقاطيا أماميا R محددا



تابع شكل رقم (٢١٧)

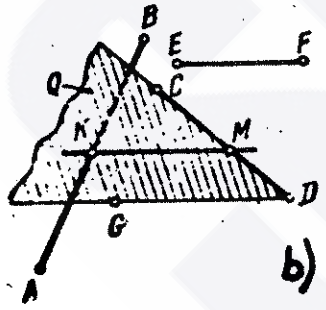
عليه مقطعا AK_2 يساوي 1_2 .

٣ـ من K_1 نمرر مستويا Q (الشكل ٢١٦ د) يوازي المستوي P (نحدده بأثريه Q_h و Q_v) ومن K_2 نمرر مستويا S يوازي المستوي المحدد بالمستقيم BC والنقطة A (نحدده بأفقه $K_2 5$ وجبهته $K_2 6$) فيكون لدينا $P_h // Q_h$ و $P_v // Q_v$

وكذلك $K_2 5 // (A-2)$ و $K_2 6 // (A-3)$

٤ـ بعد ذلك نحدد خط MN تقاطع المستويين Q والمستوي المحدد بأفقه $K_2 5$ وجبهته $K_2 6$ (الشكل ٢١٦ هـ) فيكون MN هو المستقيم المطلوب .

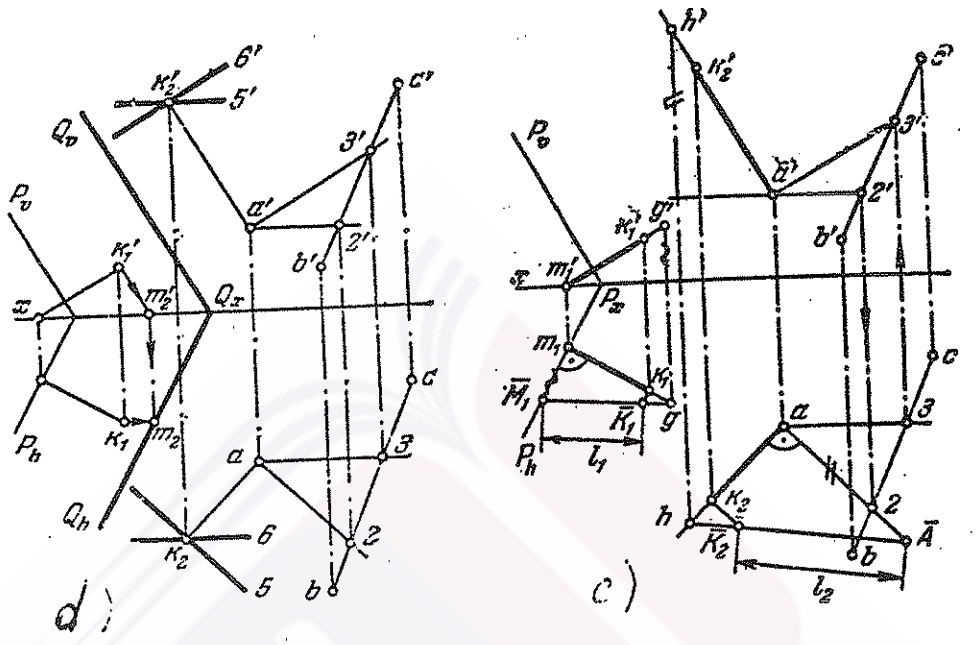
٤٩ـ ارسم مستقيما يقطع المستقيمين AB و CD ويوازي المستقيم EF (الشكل ٢١٧ آ) .



شكل رقم (٢١٧)

الحل : المستقيم المطلوب يقع في مستو يمر من أحد المستقيمين AB (أو CD)فيقطع الآخرويوازي المستقيم EF (الشكل ٢١٧ ب) . لذلك تشمل خطة الحل الخطوات التالية :

آ ـ نمرر من المستقيم CD المستوي Q موازيا للمستقيم EF .



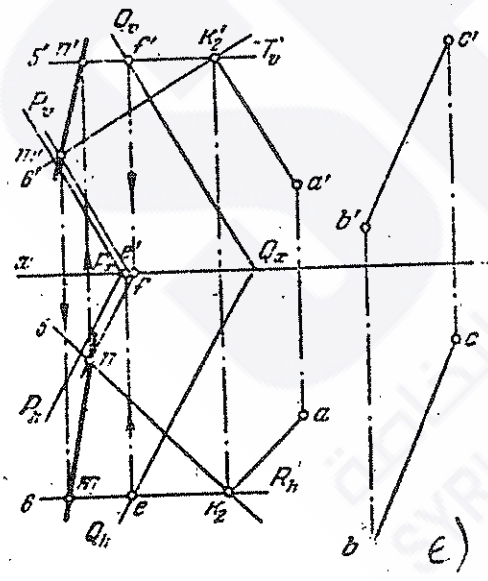
تابع شكل رقم (٢١٦)

مستقيمات ، يوضح لنا الشكل(٢١٦ب) طريقة الحصول على احدها .

للتوصل للحل المطلوب نقوم بالعمليات التالية :

١- نأخذ نقطة M_1 في المستوي P الشكل (٢١٦ جـ) ونقيم منها عمودا على المستوي ونأخذ عليه مقطعا M_1K_1 يساوي l_1 .

٢- نقيم من النقطة A عمودا على المستوي المحدد بالمستقيم BC والنقطة A وذلك بمساعدة أفق المستوي (A-2) وجبهة المستوي (A-3) ونأخذ

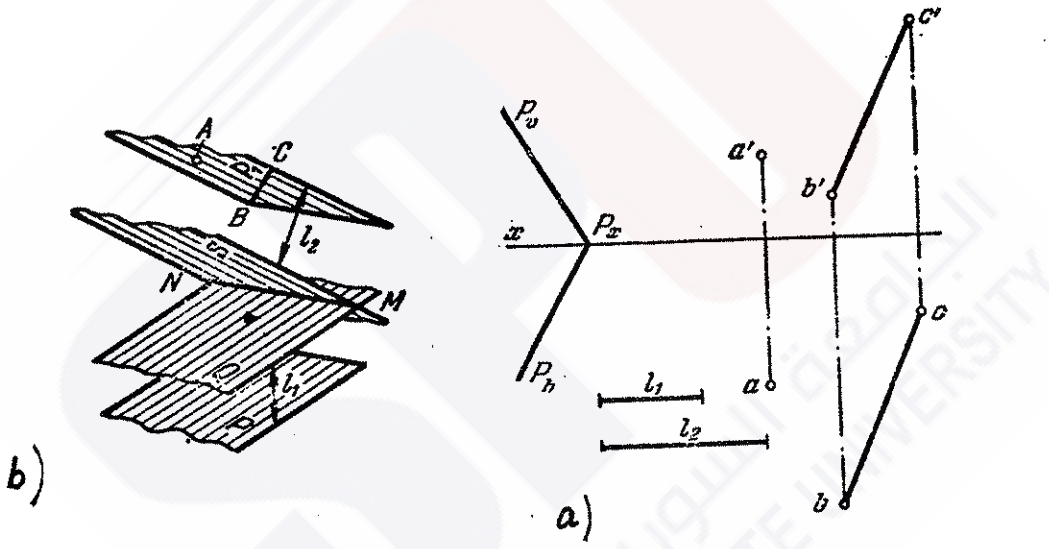


تابع شكل رقم (٢١٦)

يوازي mn ومن a' مستقيما b'f' يوازي m'n' فنحصل على مسقطي المستقيم BF المطلوب .

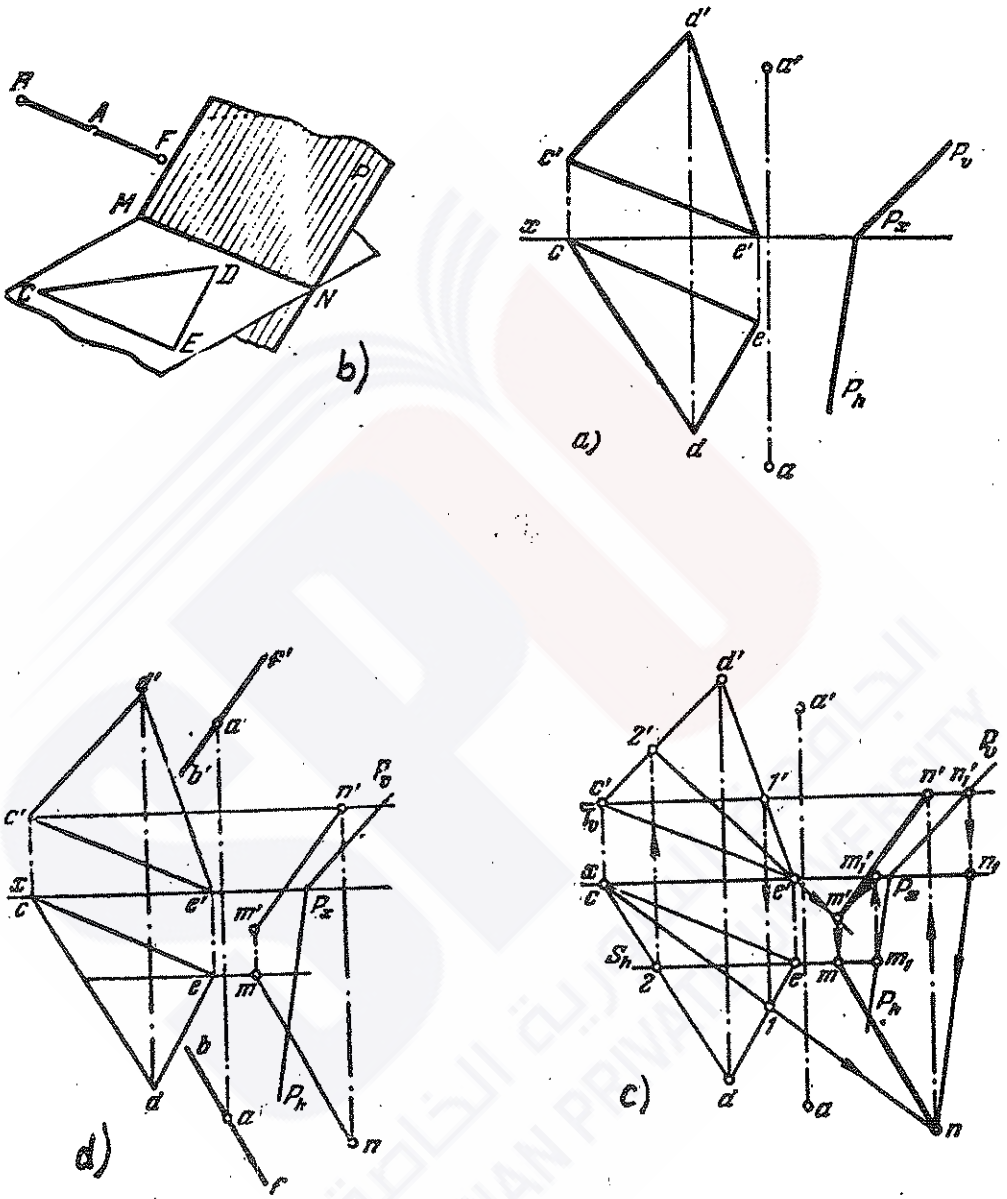
٤٨ ارسم مستقيمات تبعد في وقت واحد مسافة l_1 عن المستوي P ومسافة l_2 عن المستوي المحدد بالمستقيم BC والنقطة A (الشكل ٢١٦ آ) .

الحل : أسس حل هذا المثال تتضمن ايجاد المحل الهندسي لمستقيمات



شكل رقم (٢١٦)

واقعة على بعد معين من مستو محدد . هذا المحل الهندسي يكون مستويا يوازي المستوي المعني . لذلك تكون المستقيمات المطلوبة الفصول المشتركة لمستويين يوازيان المستوي P ويقعان على جهتيه وعلى مسافة l_1 عنه يتقاطعان مع مستويين يوازيان المستوي المحدد الآخر ويقعان على جهتيه وعلى مسافة l_2 عنه . وفق ماذكرناه ، يمكننا الحصول على أربعة



شكل رقم (٢١٥ آ و ب و جـ و د)

MN(mn , m'n') ٠ حسب قواعد اسقاط المستقيمات تكون المساقط المتماثلة للمستقيمات المتوازية متوازية أيضاً ، ولذلك نمرر من a مستقيما bf

٤ـ نمرر من النقطة B مستويا Q يعامد المستقيم AE • لهذا الغرض نمرر من B مستقيما أفقيا (4 - B) وأماميا (3 - B) يعامدان المستقيم AE (الشكل ٢١٤ هـ) فيمثل هذان المستقيمان أفق وجبهة المستوي Q •

٥ـ نحدد نقطة D تقاطع المستقيم AE مع المستوي Q • لأجل ذلك نمرر من المستقيم AE مستويا اسقاطيا أفقيا T (نحدده بأثره الأفقي T_h المتطابق مع ae) ونحدد خط تقاطع المستويين T و Q (3-4,3'4') ومن تقاطع 3'-4' مع a'e' نحدد d' المسقط الأمامي لنقطة تقاطع AE والمستوي Q • نحدد ، حسب قواعد الاسقاط ، مسقطها الأفقي d على ae (الشكل ٢١٤ هـ) •

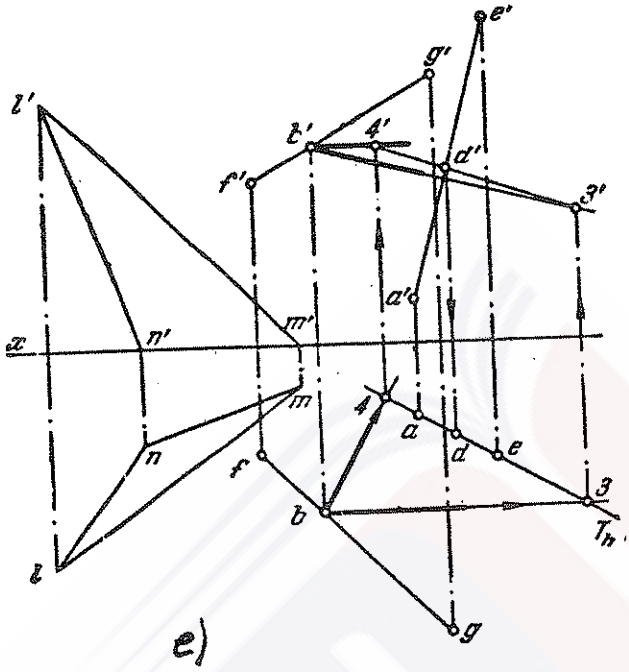
٦ـ يمكننا الآن تحديد مسقطي متوازي الأضلاع المطلوب (الشكل ٢١٤ و) فنصل ab و a'b' و ad و a'd' ومن ثم نرسم من d و d' مستقيمين يوازيان ab و a'b' ومن b و b' مستقيمين يوازيان ad و a'd' على التوالي فنحصل من تقاطعهما على النقطة C(c,c') وعلى المسقطين الأفقي abcd والأمامي a'b'c'd' لمتوازي الأضلاع المطلوب •

٤٧ـ مرر من النقطة A مستقيما يوازي المستوي P ومستوي المثلث CDE (الشكل ٢١٥ آ) •

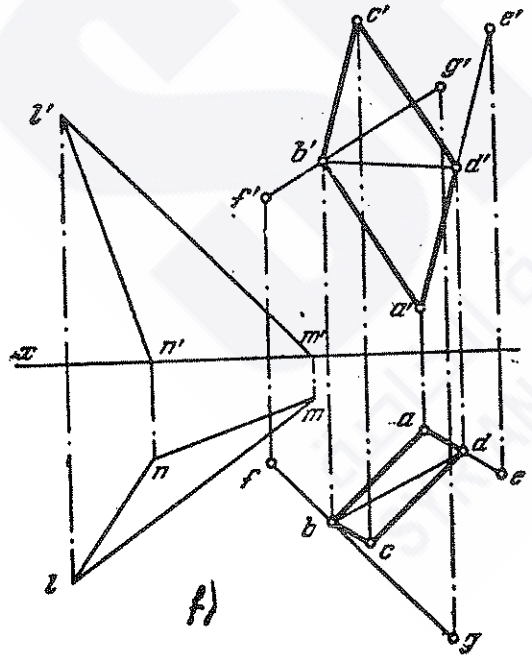
الحل : لكي يكون المستقيم موازيا لمستويين في الوقت ذاته يجب أن يكون موازيا لخط تقاطعهما (الشكل ٢١٥ ب) • لذلك يجب أولا تحديد خط تقاطع المستويين P والمثلث CDE ولهذا الغرض نستخدم المستويين المساعدين T و S (الشكل ٢١٥ جـ) فنحصل على خط التقاطع

لهذا الغرض نرسم من النقطة A مستقيمين (A - 1) و (A - 2) يوازيان L M و L N على التوالي ، فيحدد هذان المستقيمان المستوي P (الشكل ٢١٤ جـ و د)٠

٣- نحدد نقطة B تقاطع المستقيم FG والمستوي P ٠ لهذا الغرض نمرر من المستقيم FG مستويا اسقاطيا أماميا S (نحدده بأثره S_v الذي يتطابق مع f'g')٠ المسقط الأفقي (2-1) لخط تقاطع P و S يتقاطع مع fg في النقطة b المسقط الأفقي لنقطة التقاطع ٠ نحدد ، حسب قواعد الاسقاط ، مسقطها الأمامي b' على f'g' ٠



شكل رقم (٢١٤ هـ)

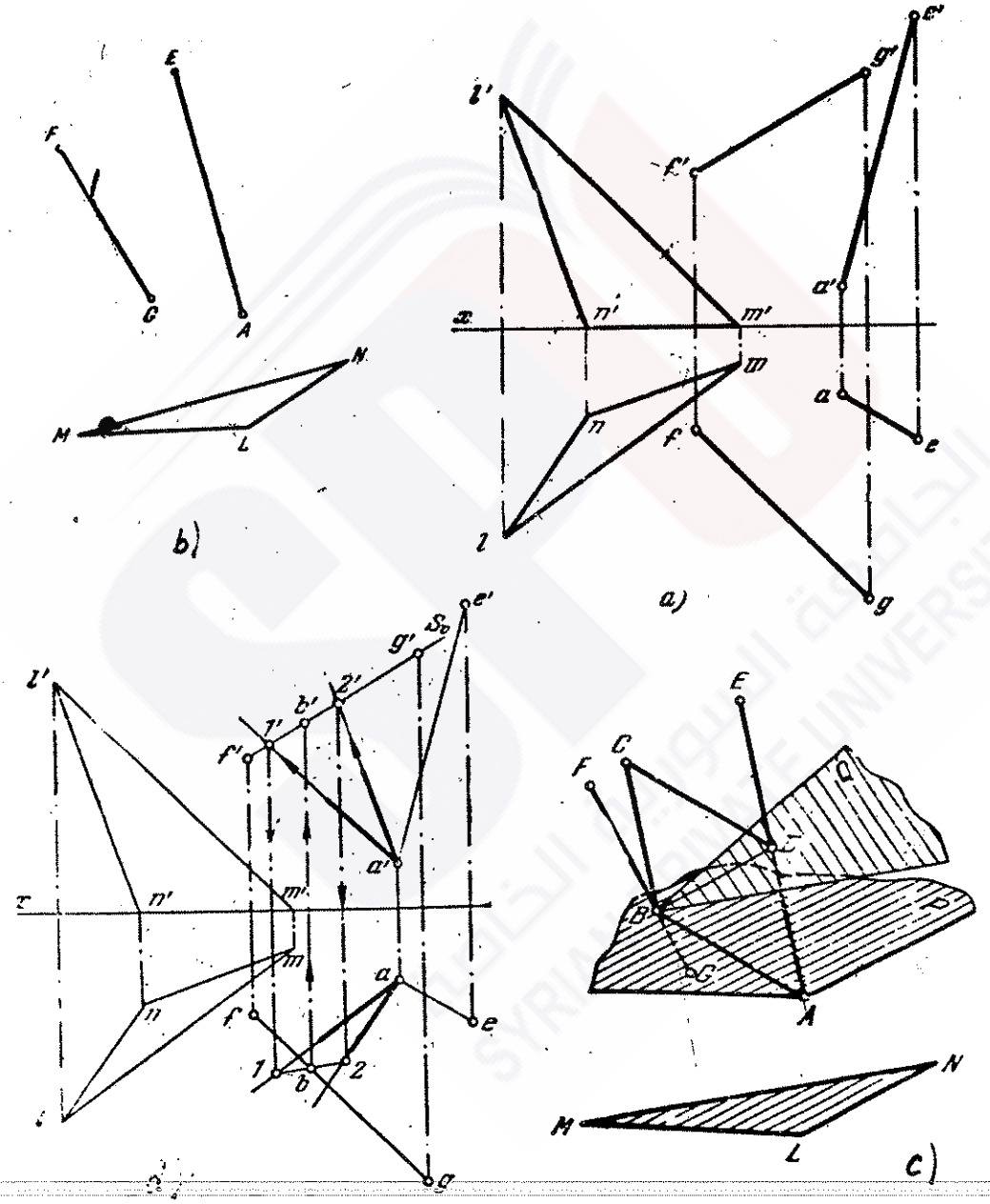


شكل رقم (٢١٤و)٠

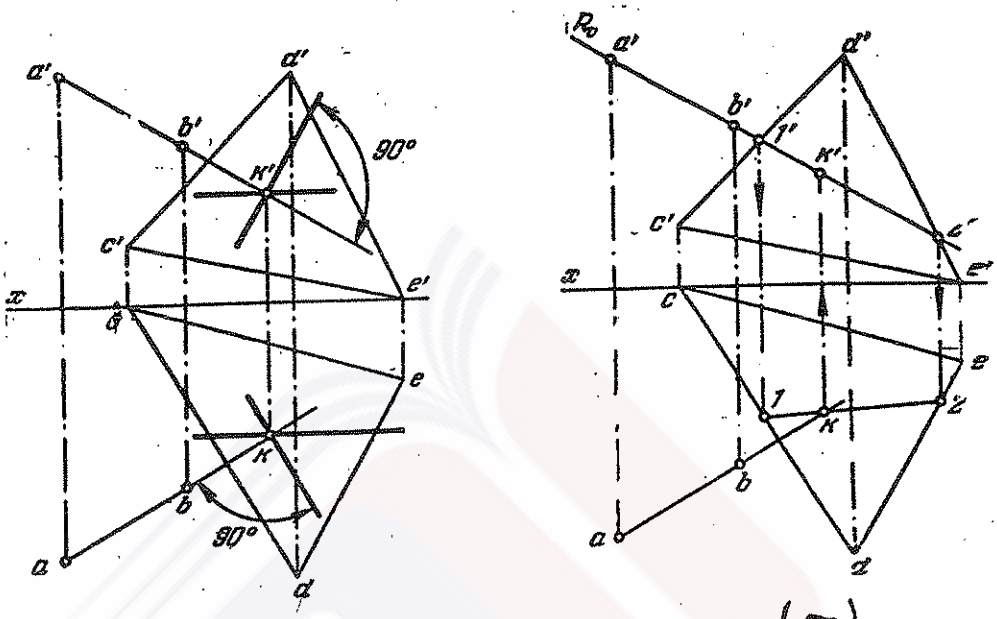
الحـــــل :

١ـ نحدد مخطط الحل (الشكلان ٢١٣ ب و جـ) .

٢ـ من النقطة A نمرر مستويا P يوازي مستوي المثلث LMN .



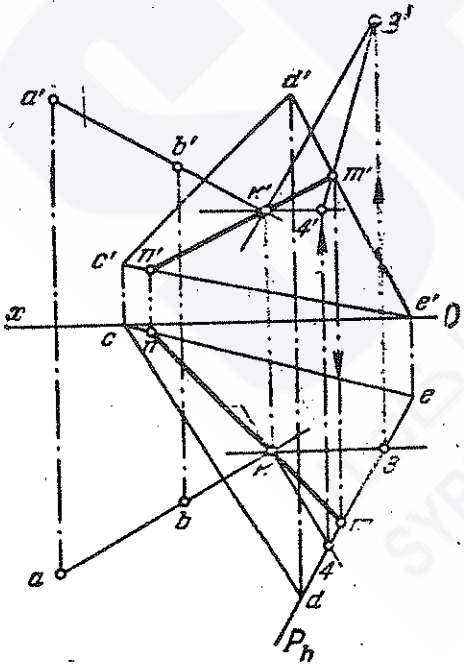
شكل رقم (٢١٤)



تابع شكل رقم (٢١٣ جـ و د)

المثلث ED مع المستوي Q المار من النقطة K (الشكل ٢١٣ هـ) . وبذلك يكون المستقيم MK(mk,m'k') المستقيم المطلوب .

٤٦ـ لدينا المثلث L M N والمستقيمان AE و FG . ارسم متوازي أضلاع ضلعه AD يقع على المستقيم AE وضلعه A B يوازي مستوي المثلث ورأسه B يقع على المستقيم FG وقطره BD يعامد ضلعه AD (الشكل ٢١٣ آ).

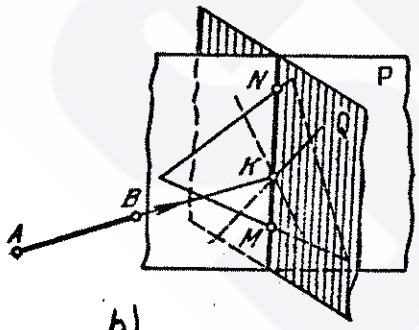


تابع شكل رقم (٢١٣ هـ)

٤ـ في الشكل (٢١٢ و) المستوي Q ، المار من منتصف المستقيم AB عموديا عليه ، محدد بأثريه . نحدد نقطتي M و N تقاطع الاثار المماثلة للمستويين P و Q ونمرر منهما المستقيم المطلوب MN (الشكل ٢١٢ ز) .

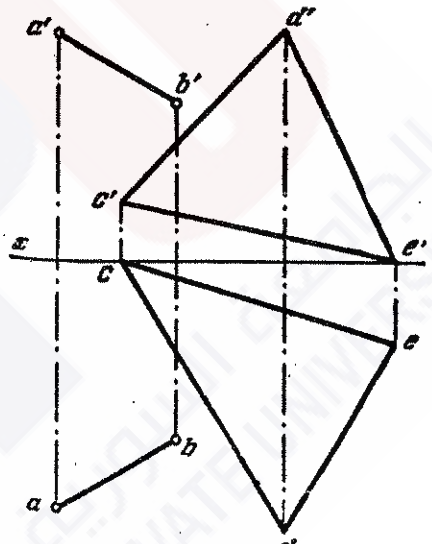
٤٥ـ ارسم في مستوي المثلث CDE مستقيما يتقاطع مع المستقيم AB بزاوية قائمة (الشكل ٢١٣ آ) .

الحل : يمثل المستقيم المطلوب خط تقاطع مستوي المثلث CDE(P) مع المستوي Q (الشكل ٢١٣ ب) العمودي على المستقيم AB والمار من نقطة K تقاطع المستقيم AB مع المستوي P . لذلك نحدد أولا



b)

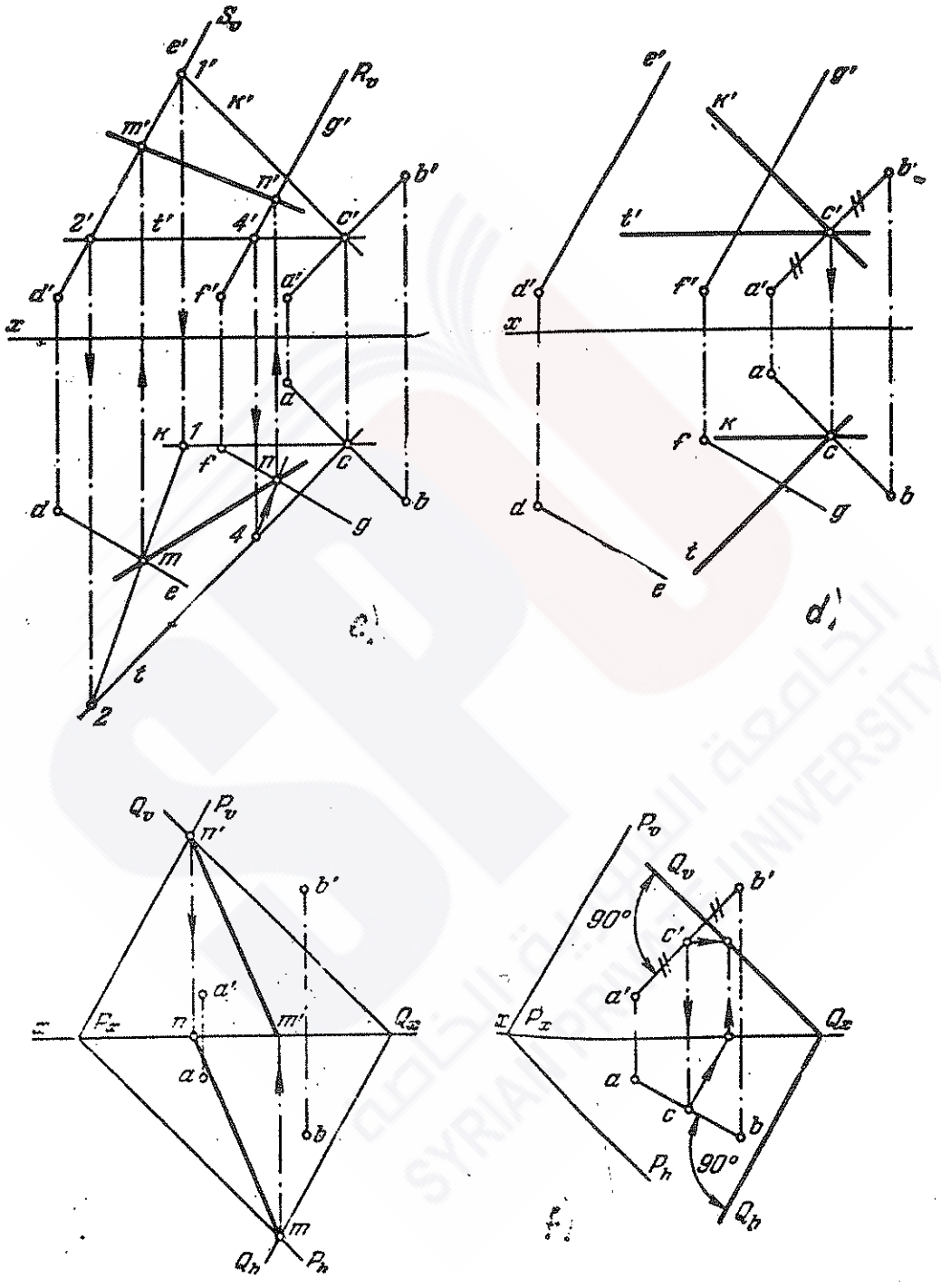
(ب)



(آ)

شكل رقم (٢١٣ آ و ب)

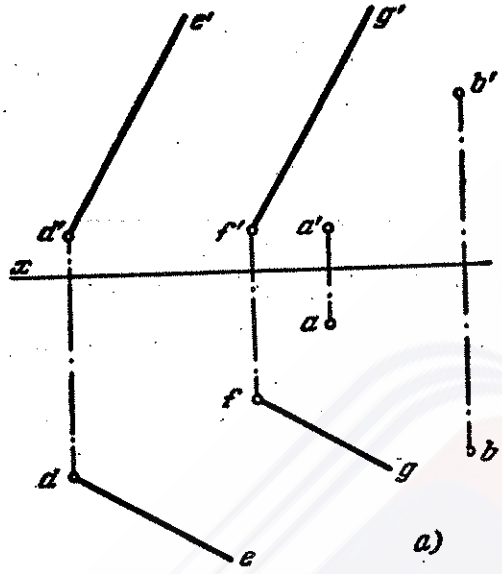
نقطة K(k,k') (الشكل ٢١٣ جـ) بامرار مستو اسقاطي أمامي R من المستقيم AB . بعد ذلك نمرر من المسقطين k و k' مساقط أفق وجبهة المستوي Q العمودي على AB (الشكل ٢١٣ د) . الآن لتحديد الفصل المشترك بين المستويين P و Q يكفي ايجاد نقطة M(m,m') تقاطع ضلع

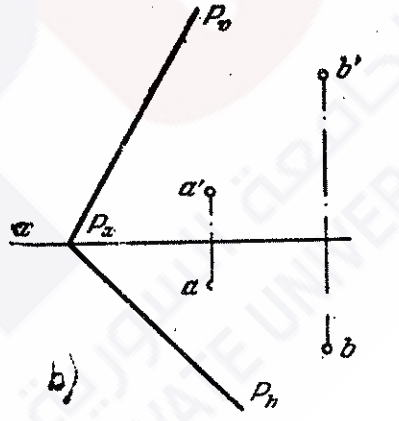


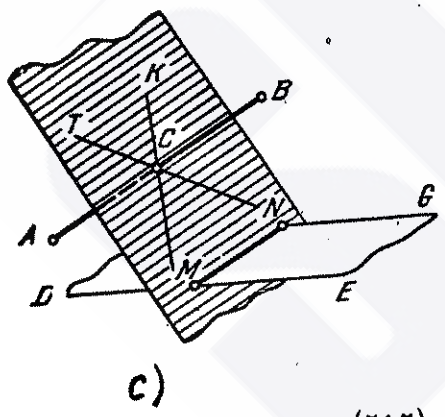
تابع شكل رقم (٢١٢)

المشترك بين هذا المستوي والمستوي P (المستقيم MN في الشكل ٢١٢ جـ) .

٢- وفق قاعدة تقسيم مستقيم بنسبة معينة ننصف مسقطي المستقيم AB الأفقي ab والأمامي a'b' في النقطة (c,c') ونحدد المستوي المار من هذه النقطة C







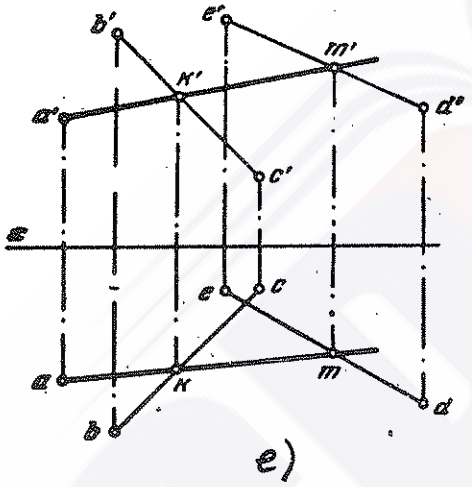
شكل رقم (٢١٢)

بأفق المستوي (CT(ct,c't' وجبهة المستوي CK(ck,c'k') (الشكل ٢١٢ د) ويكون عموديا على AB .

٣- نحدد الفصل المشترك بين المستوي P وهذا المستوي من خلال تحديد نقطتي تقاطع المستقيمين FG و DE المحددين للمستوي P مع المستوي الثاني (الشكل ٢١٢ هـ) .

المستقيم المطلوب من النقطتين A و K ويقطع المستقيم ED في النقطة M(m,m') (الشكل ٢١١ هـ) . عند الحل الصحيح للمسألة يقع المسقطان الأفقي m و 'm على خط تداعي واحد يعامد خط الأرض .

يمكن حل هذا المثال بطريقة أخرى وذلك بأخذ مستويين : الأول محدد بالنقطة A والمستقيم ED (المثلث AED) والثاني محدد بالنقطة A والمستقيم BC (يمثل مستوي المثلث ABC المحدد بالطريقة ذاتها التي حددنا بها المثلث AED) ، بعد ذلك نحدد فصلهما المشترك فيكون هو المستقيم المطلوب الذي يمر من النقطة A ويقطع المستقيمين BC و ED .



e)

شكل رقم (٢١١ هـ)

٤٤ـ عين في المستوي P ، المحدد :

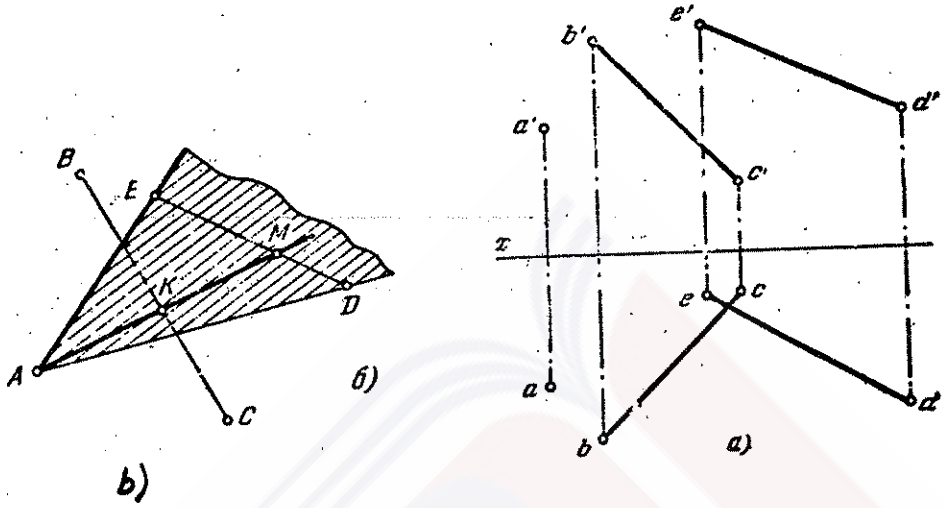
آ ـ بمستقيمين متوازيين (الشكل ٢١٢ آ) .

ب ـ بأثريه (الشكل ٢١٢ ب) .

المحل الهندسي للنقاط الواقعة على بعد واحد عن النقطتين A و B .

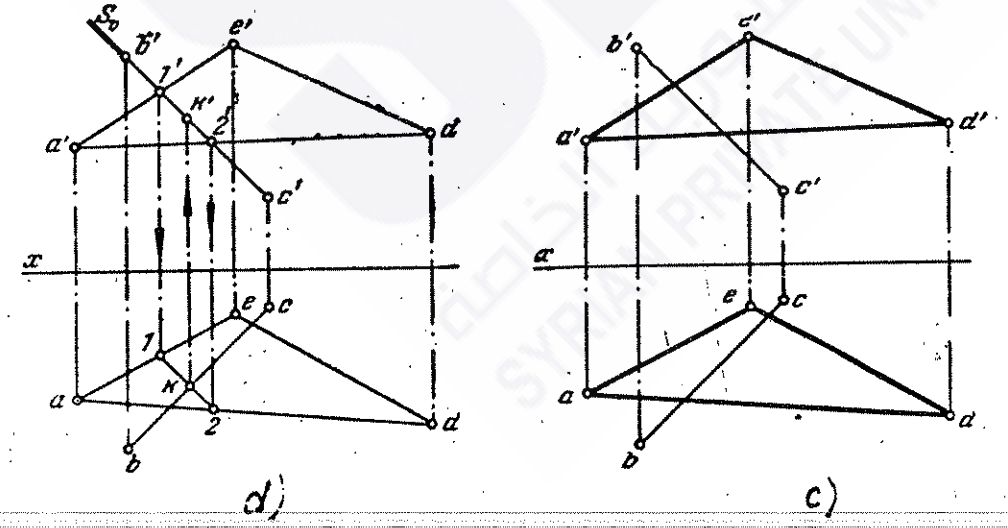
الحل :

١ـ يمثل المحل الهندسي لجميع النقاط الفراغية الواقعة على بعد واحد عن النقطتين A و B مستويا يعامد المستقيم AB ويمر من منتصفه (الشكل ٢١٢ جـ) . لهذا فان المحل الهندسي المطلوب يمثل الفصل

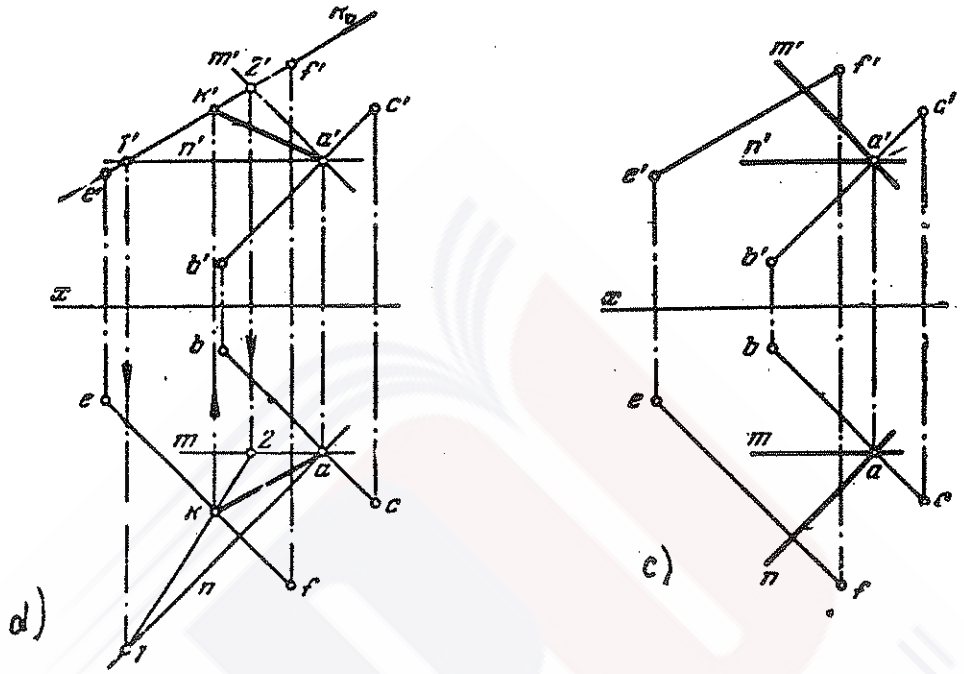


شكل رقم (٢١١ آ و ب)

النقطتين A و K . لذلك نحدد المستوي بالمثلث AED بأن نصل A مع E و D فنحصل في التعبير الاسقاطي على مسقطيه الأفقي aed والأمامي a'e'd' (الشكل ٢١١ جـ) ومن ثم نحدد نقطة K تقاطع المستقيم BC مع مستوي المثلث A E D (الشكل ٢١١ د) . وبذلك يمر



شكل رقم (٢١١ جـ و د)



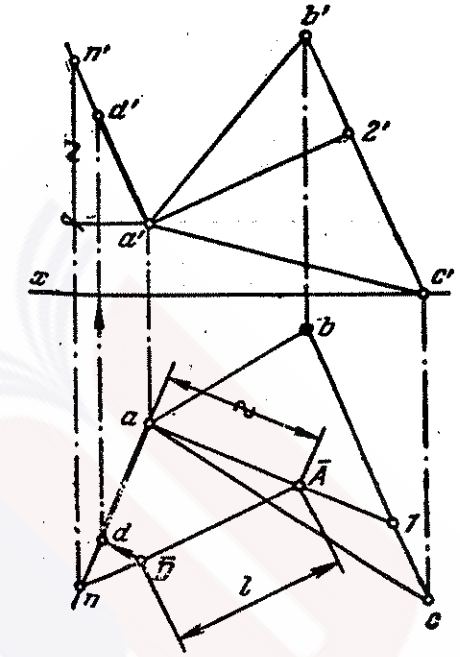
(شكل رقم ٢١٠ جـ و د)

(الشكل ٢١٠ د) بتمرير مستو اسقاطي أمامي R من المستقيم EF (نحدد المستوي بأثره R_v) . نصل a و k ونصل a' و k' فنحصل على المسقط الأفقي ak و a'k' المسقط الأمامي للعمود المطلوب AK .

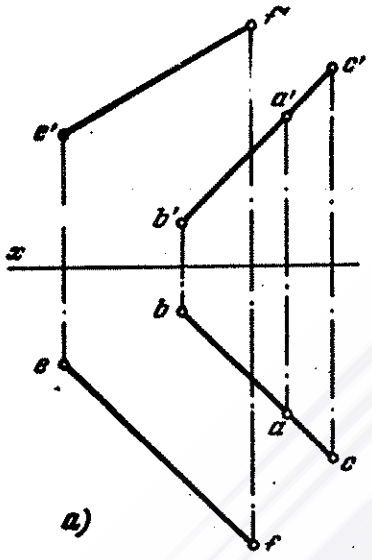
٤٣ـ مرر من النقطة A مستقيما يقطع المستقيمين BC و ED (الشكل ٢١١ آ) .

الحل :

١ـ المحل الهندسي للمستقيمات المارة من النقطة A والمتقاطعة مع المستقيم ED يتمثل بالمستوي المحدد بهذين العنصرين (الشكل ٢١١ ب) . لذلك اذا رسمنا هذا المستوي وحددنا نقطة K تقاطع هذا المستوي مع المستقيم الثاني BC فان المستقيم المطلوب يمر من



شكل رقم (٢٠٩ جـ)

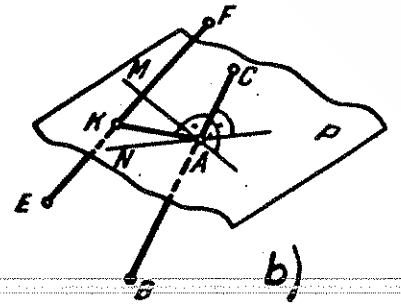


شكل رقم (٢١٠ آ)

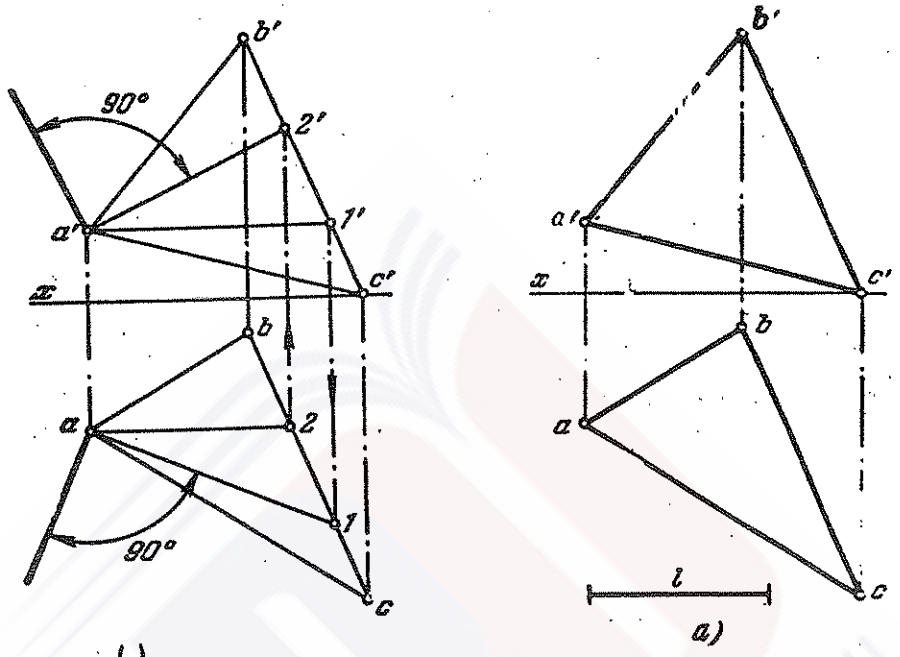
٤٢ـ أقم عمودا على المستقيم BC من نقطته A يقطع المستقيم EF (الشكل ٢١٠ آ) .

الحل : المحل الهندسي للأعمدة المقامة على المستقيم BC من النقطة A يتمثل بالمستوي P المار من النقطة A ويعامد المستقيم BC (الشكل ٢١٠ ب) . وتمثل نقطة K تقاطع هذا المستوي مع المستقيم EF نقطة تقاطع العمود المطلوب مع المستقيم EF .

نحدد المستوي المار من A والمتعامد مع المستقيم BC بجبهته AM وأفقه AN (الشكل ٢١٠ جـ) . بعد ذلك نحدد نقطة K تقاطع المستقيم EF مع هذا المستوي



شكل رقم (٢١٠ ب)

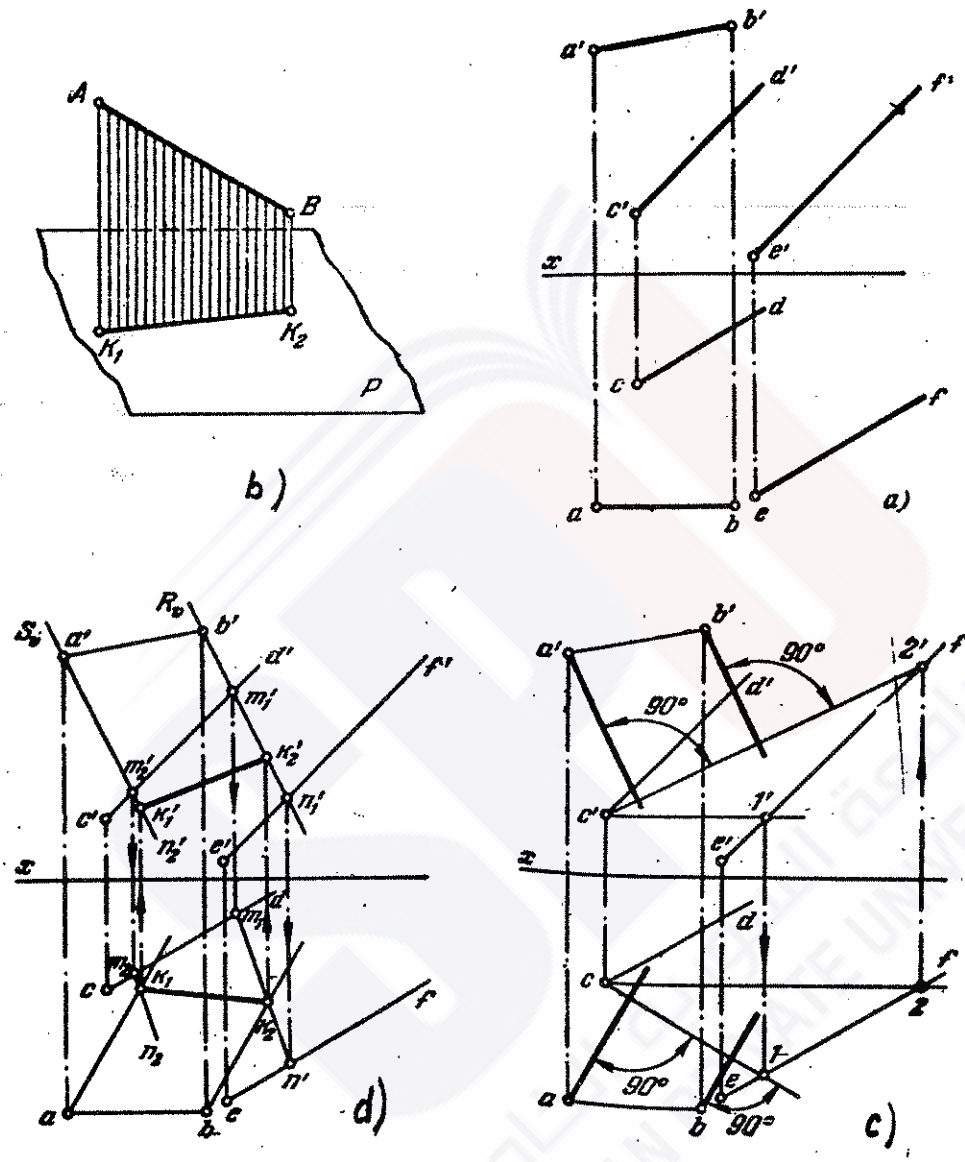


شكل رقم (٢٠٩ آ و ب)

٢ـ المسقط الأفقي للعمود المقام من A يعامد المسقط الأفقي a-1 لأفق المستوي ومسقطه الأمامي يعامد المسقط الأمامي a'-2' لجبهة المستوي .

٣ـ لتحديد طول مقطع العمود المطلوب (1) نأخذ على العمود مقطعا كيفيا (يفضل أن يكون طول كل من مسقطيه الأفقي an والأمامي a'n' < 1) ونحدد طول المقطع AN الحقيقي بطريقة المثلث قائم الزاوية (الشكل ٢٠٩ جـ) .

٤ـ نأخذ من $\bar{A}$ على $\bar{A}n$ مقطعا $\bar{AD}$ طوله 1 ومن نقطة $\bar{D}$ نقيم عمودا على an فنحصل على النقطة d وبذلك يكون ad المسقط الأفقي لمقطع العمود المقام من A على مستوي المثلث ABC والذي طوله يساوي 1 . نحدد المسقط الأمامي d' فنحصل على a'd' .



شكل رقم (٢٠٨)

مقطعا طوله 1 (الشكل ٢٠٩ آ) .

الحـــــل :

١ـ نرسم أفق مستوي المثلث A – 1 وجبهته A – 2 (الشكل ٢٠٩ ب).

٢٠٧ ح) ، وهذا يعني أن المثلث BCD هو مستوي اسقاطي جانبي ، ولذلك فان المستقيم الذي يعامد يكون مستقيما جانبيا .

٢ـ لذلك نستكمل التعبير الاسقاطي الثلاثي ونحدد المسقط الجانبي "b"c"d للمثلث و "a للنقطة A . ونرسم من "a مستقيما يعامد المستقيم "b"c"d فيقطعه في "k المسقط الجانبي لنقطة تقاطع العمود مع مستوي المثلث BCD .

٣ـ نحدد المسقطين الأفقي k والأمامي 'k لنقطة التقاطع K على المسقطين الأفقي والأمامي للمستقيم المطلوب اللذين يعامدان خط الأرض.

٤٠ـ عين في المستوي P المحدد بالمستقيمين المتوازيين CD و EF المحل الهندسي لقواعد الأعمدة النازلة من نقاط المستقيم AB على هذا المستوي (الشكل ٢٠٨ آ) .

الحل : المحل الهندسي المطلوب يتمثل بالفصل المشترك k_1k_2 بين المستوي P والمستوي المتعامد معه والمار من المستقيم AB (الشكل ٢٠٨ ب) .

١ـ نرسم في المستوي P أفق المستوي (1- C) وجبهة المستوي (2 - C) (الشكل ٢٠٨ جـ) . المساقط الأمامية للأعمدة النازلة من نقاط المستقيم AB تعامد المسقط الأمامي لجبهة المستوي '2-'c ومساقطها الأفقية تعامد المسقط الأفقي C-1 لأفق المستوي .

٢ـ لرسم المحل الهندسي المطلوب نحدد نقطتي k_1 و k_2 تقاطع الأعمدة المرسومة مع المستوي P (الشكل ٢٠٨ د) فيكون المستقيم k_1k_2 هو المحل الهندسي المطلوب .

٤ـ ارسم من الرأس A مستقيما يعامد مستوي المثلث ABC وحدد عليه

النقطة D أفق المستوي (2 - D) . يمر المسقط الأمامي للمستقيم المطلوب من a' ويعامد ('1-b') ويمر مسقطه الأفقي من a ويعامد (2 - d) .

٢ـ لتحديد نقطة تقاطع المستقيم مع المستوي نمرر من المستقيم المعني مستويا اسقاطيا أفقيا R (نحدده في الشكل "٢٠٧ هـ" بأثره الأفقي R_h) ونحدد خط تقاطعه MN مع مستوي المثلث BCD فنحصل في المسقط الأمامي من تقاطع المسقط الأمامي 'm'n للفصل المشترك مع المسقط الأمامي للمستقيم المعني على النقطة 'k المسقط الأمامي لنقطة التقاطع المطلوبة K . نحدد بعد ذلك وفق قواعد الاسقاط مسقطها الأفقي k .

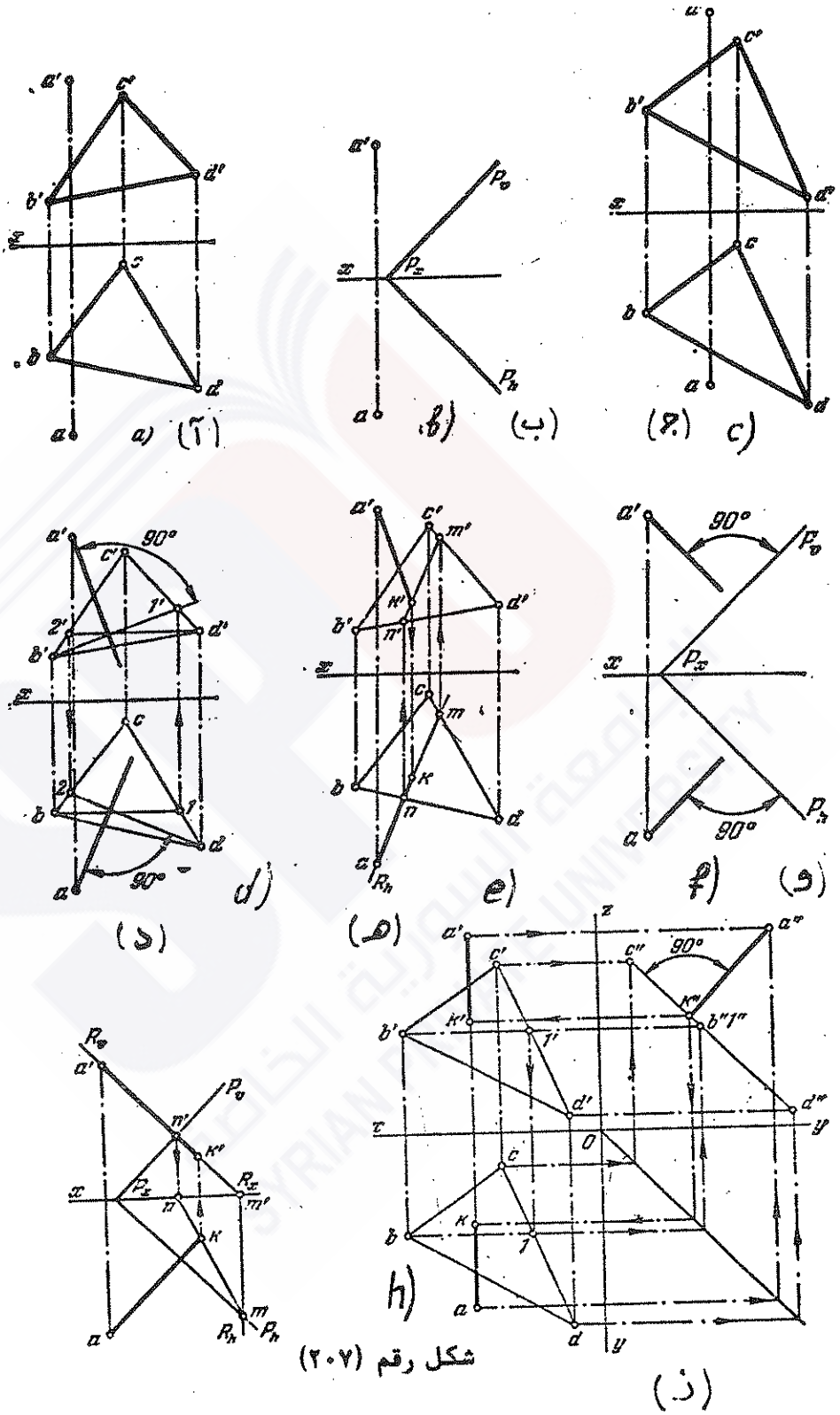
الحل ب :

١ـ نمرر من a و a' مستقيمين يعامدان الأثر الأفقي P_h والأمامي P_v على التوالي (الشكل ٢٠٧و) فنحصل على المسقطين الأفقي والأمامي للمستقيم المطلوب .

٢ـ لتحديد نقطة التقاطع K نمرر من المستقيم مستويا اسقاطيا أماميا R في الشكل ٢٠٧ ز ـ محدد بأثريه R_v و R_h) ونحدد خط تقاطعه MN مع المستوي P فنحصل في المسقط الأفقي من تقاطع المسقط الأفقي mn للفصل المشترك مع المسقط الأفقي للمستقيم المعني على النقطة k المسقط الأفقي لنقطة التقاطع المطلوبة K .

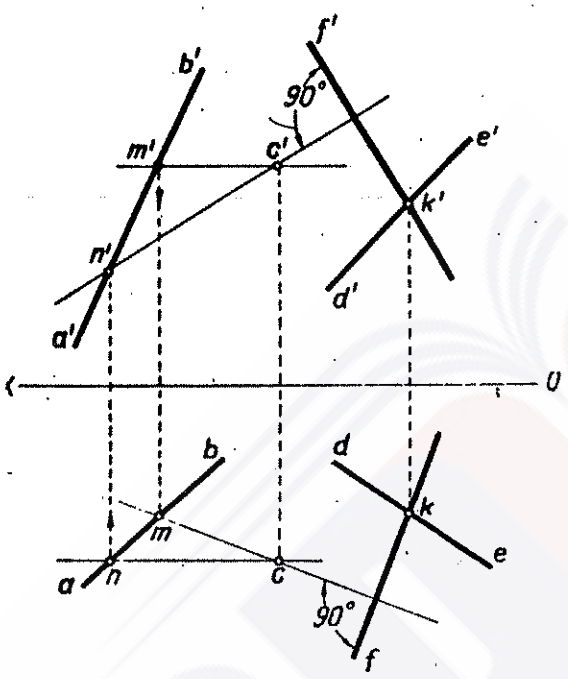
الحل جـ :

١ـ عند تمرير أفق المستوي (1 - B) نلاحظ أنه يوازي خط الأرض (الشكل



شكل رقم (٢٠٧)

المستوي P . لهـذا الغرض نرسم من k مستقيما kf يعامد المسقط الأفقي cm لأفق المستوي . ونرسم من 'k مستقيما 'k'f يعامد المسقط الأمامي 'c'n لجبهة المستوي .



شكل رقم (٢٠٦)

جـ ـ المستقيمان DE و KF يحددان المستوي R العمودي على المستوي P .

ز ـ أمثلة عامة مختلطة (شاملة) :

٣٩ـ مرر من النقطة A مستقيما يعامد المستوي المحدد :

آ ـ بمستوي المثلث BCD (الشكل ٢٠٧ آ) .

ب ـ بأثريه (الشكل ٢٠٧ ب) P_v و P_h .

جـ ـ بمستوي المثلث BCD (الشكل ٢٠٧ جـ) .

حدد في جميع الحالات نقطة تقاطع العمود مع المستوي .

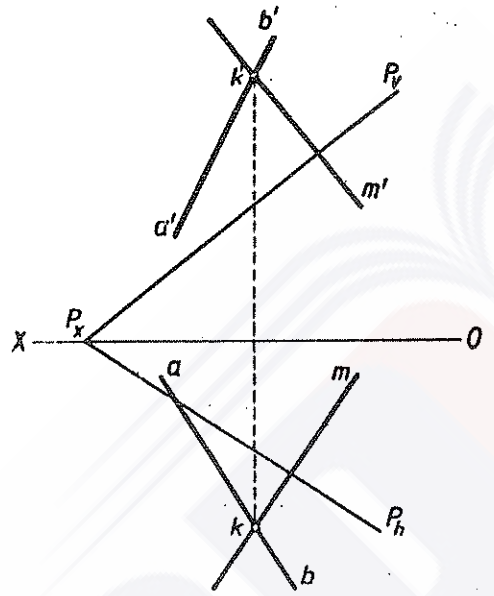
الحـــل آ :

أ ـ نمرر من النقطة B (الشكل ٢٠٧ د) جبهة المستوي (1-B) ومـن

٣٧ـ مرر من المستقيم AB مستويا R يعامد المستوي P (الشكل ٢٠٥).

الحـــل :

آ ـ نأخذ نقطة كيفية K(k,k') على المستقيم AB ونرسم منها مستقيما يعامد المستوي P فنرسم من k' مستقيما k'm' يعامد P_v ونرسم من k مستقيما km يعامد P_h وبذلك يحدد المستقيمان AB و KM المستوي R العمودي على المستوي P .



شكل رقم (٢٠٥)

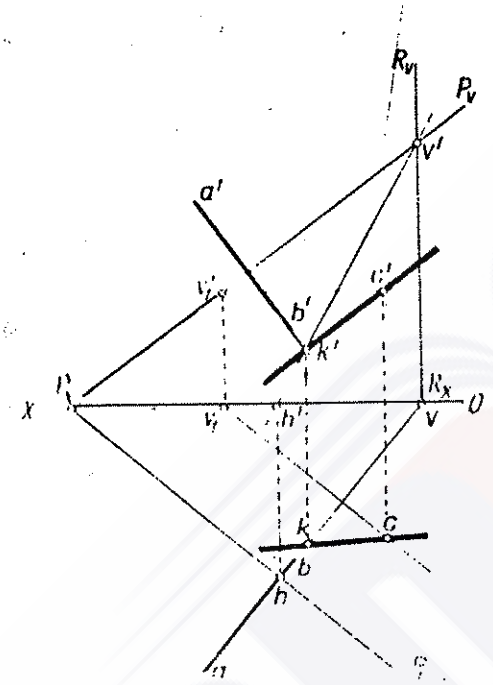
٣٨ـ مرر من المستقيم DE مستويا R يعامد المستوي P المحدد بالمستقيم AB والنقطة C (الشكل ٢٠٦).

الحـــل :

آ ـ نمرر من النقطة (c,c') أفق وجبهة المستوي ، فنمرر من c' مستقيما يوازي خط الأرض ويقطع a'b' في النقطة m' ونحدد مسقطها الأفقي m على ab فنحصل على مسقطي أفق المستوي (cm,c'm') . ونمرر من c مستقيما يوازي خط الأرض ويقطع ab في النقطة n ونحدد مسقطها الأمامي n' على a'b' فنحصل على مسقطي جبهة المستوي (cn , c'n') .

ب ـ نأخذ نقطة كيفية K(k,k') على DE ونرسم منها مستقيما يعامد

للحل المطلوب :



شكل رقم (٢٠٤)

آ – نمرر من النقطة C(c,c') مستويا P يعامد المستقيم AB . لهذا الغرض نمرر من النقطة (c,c') مستقيما أفقيا يعامد المستقيم AB لذلك نمرر من c مستقيما يعامد ab فيقطع خط الأرض في النقطة v_1 . نرسم من c' مستقيما يوازي خط الأرض ونحدد عليه v'_1 وفق قواعد الاسقاط العامة وهي المسقط الأمامي للأثر الأمامي (المتطابق معه) للمستقيم الأفقي المار من النقطة C .

ب – نرسم من v'_1 مستقيما يعامد a'b' فنحصل على الأثر الأمامي P_v للمستوي P الذي يقطع خط الأرض في النقطة P_x .

جـ – نرسم من P_x مستقيما يعامد ab فنحصل على الأثر الأفقي P_h للمستوي P . نحدد الآن نقطة تقاطع AB مع المستوي P . لهذا الغرض نمرر من المستقيم AB مستويا اسقاطيا أفقيا مساعدا R ونجدد خط تقاطعه (hv,h'v') مع المستوي P . بعد ذلك نحدد نقطة (k,k') تقاطع HV مع AB فنحصل على المستقيم المطلوب CK(ck,c'k') .

٣٥ـ ارسم من النقطة K المعلوم مسقطها الأفقي k والمنتمية للمستوي P المحدد بالمستقيم AB والنقطة C مستقيما يعامد المستوي P طوله 1 سلم (الشكل ٢٠٣) .

الحـــل :

آ ـ نمرر من النقطة C(c,c') مستقيما (cd,c'd') يوازي المستقيم (ab,a'b') فيصبح المستوي P محددا بمستقيمين متوازيين .

ب ـ نحدد المسقط الأمامي k' للنقطة K باستخدام جبهة المستوي .

جـ ـ نمرر من النقطة (k,k') أفق المستوي .

د ـ نرسم مسقطي العمود المقام من النقطة K على المستوي P . لهذا الغرض نرسم من النقطة k مستقيما km يعامد المسقط الأفقي لأفق المستوي ، ومن النقطة k' مستقيما k'm' يعامد المسقط الأمامي لجبهة المستوي .

هـ ـ نحدد في المسقط الأفقي بطريقة المثلث قائم الزاوية الطول الحقيقي mk لمقطع المستقيم MK ونأخذ عليه مقطعا NK طوله 1 سلم . (يمكن اجراء هذه العملية في المسقط الأمامي . نترك ذلك للطالب).

و ـ نحدد مسقطي المقطع NK(nk,n'k') باتباع طريقة الارجاع العكسية للنقطة N .

٣٦ـ مرر من النقطة C مستقيما يعامد المستقيم AB (الشكل ٢٠٤) .

الحـــل : يمكن التعبير الاسقاطي المستوي المباشر عن انزال عمود من نقطة على مستقيم فقط في حالة واحدة ، وهي عندما يكون المستقيم موازيا لأحد مستويات الاسقاط . في الحالة العامة نتبع الخطوات التالية للوصول

٣٤ـ ارسم من النقطة A الواقعة في المستوي P والمحدد مسقطها الأمامي a' فقط ، مقطع مستقيم طوله 1 ملم يعامد المستوي P (الشكل ٢٠٢).

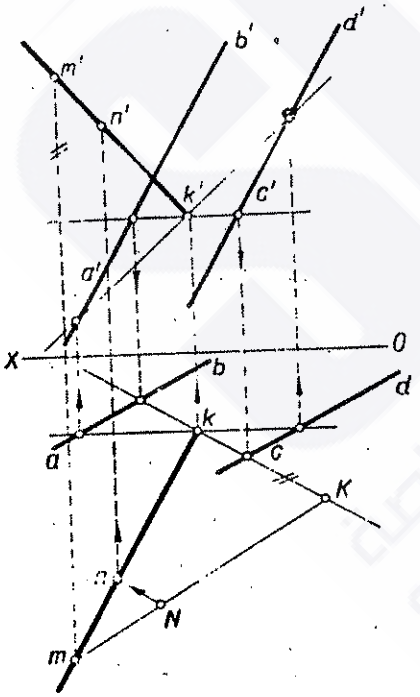
الحـــل :

آ ـ نحدد المسقط الأفقي a للنقطة A باستخدام أفق المستوي .

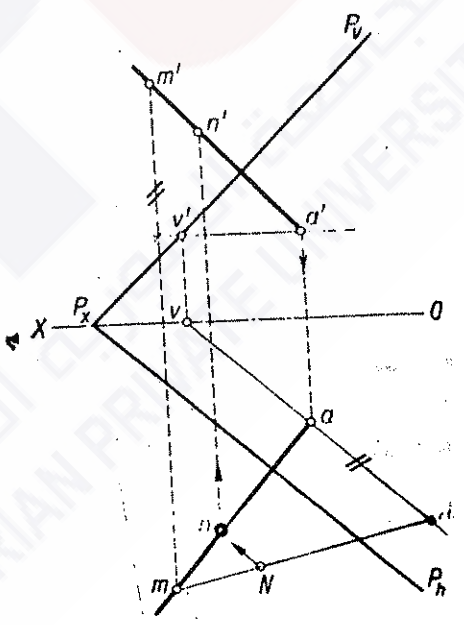
ب ـ نرسم مسقطي العمود المقام من النقطة A على المستوي P . لهذا الغرض نرسم مستقيما am يعامد P_h ومستقيما a'm' يعامد P_v .

جـ ـ نحدد في المسقط الأفقي بطريقة المثلث قائم الزاوية الطول الحقيقي mA للمستقيم MA ونأخذ عليه مقطعا NA طوله 1 ملم .

د ـ نحدد مسقطي مقطع المستقيم NA(na , n'a') باتباع طريقة الارجاع العكسية للنقطة N .



شكل رقم (٢٠٣)



شكل رقم (٢٠٢)

تقاطع المسقط الأفقي للعمود مع P_h) . المستقيم AB يكون مستقيما افقيا (هل تستطيع تعليل ذلك ؟) ، لهذا يقع المسقط الأمامي 'b لنقطة التقاطع على استقامة 'a بموازاة خط الأرض . وبما أن AB هو مستقيم أفقي ، لذلك يعبر طول مسقطه الأفقي ab عن طوله الحقيقي .

من هذه النتيجة يمكننا التوصل الى الاستنتاجات المهمة التالية :

١ـ المسافة بين نقطة كيفية ومستو اسقاطي أفقي تساوي في التعبير الاسقاطي المستوي ، المسافة بين مسقطها الأفقي والأثر الأفقي للمستوي المعني .

٢ـ المسافة بين نقطة كيفية ومستو اسقاطي أمامي تساوي ، في التعبير الاسقاطي المستوي ، المسافة بين مسقطها الأمامي والأثر الأمامي للمستوي المعني .

٣ـ المسافة بين نقطة كيفية ومستو اسقاطي جانبي تساوي ، في التعبير الاسقاطي المستوي ، المسافة بين مسقطها الجانبي والأثر الجانبي للمستوي المعني .

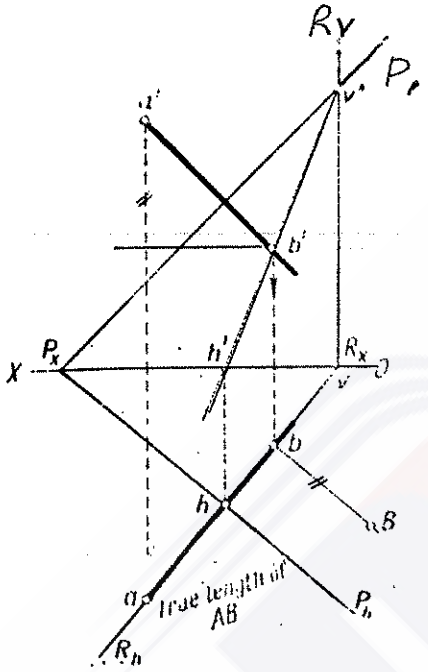
وفق المبدأ نفسه يمكننا استخلاص الاستنتاجات التالية أيضا :

٤ـ المسافة بين مستويين اسقاطيين أفقيين متوازيين تساوي ، في التعبير الاسقاطي المستوي ، المسافة بين أثريهما الأفقيين .

٥ـ المسافة بين مستويين اسقاطيين أماميين متوازيين تساوي ، في التعبير الاسقاطي المستوي ، المسافة بين أثريهما الأماميين .

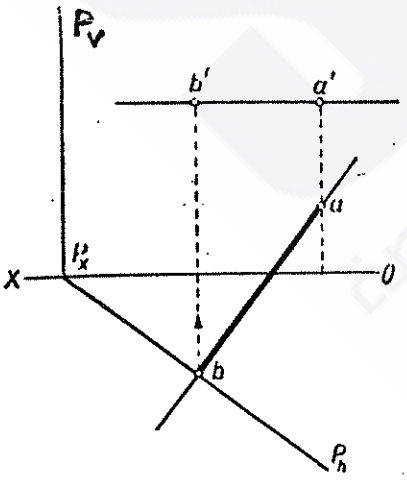
٦ـ المسافة بين مستويين اسقاطيين جانبيين متوازيين تساوي ، في التعبير الاسقاطي المستوي ، المسافة بين أثريهما الجانبيين .

المستقيم AB (الشكل ٢٠٠) مستويا اسقاطيا أماميا مساعدا R ونحدد خط تقاطع المستويين VH(vh , v'h') وفق القواعد العامة . نقطة B(b,b') تقاطع خط التقاطع VH مع العمود المقام من A تحدد نقطة تقاطع هذا العمود مع المستوي P . طول مقطع العمود AB يمثل بُعد النقطة A عن المستوي P . لهذا نوجد الطول الحقيقي لهذا المقطع بطريقة المثلث قائم الزاوية فنحصل على طوله الحقيقي المتمثل بطول وتر المثلث قائم الزاوية aB . وهو المطلوب .



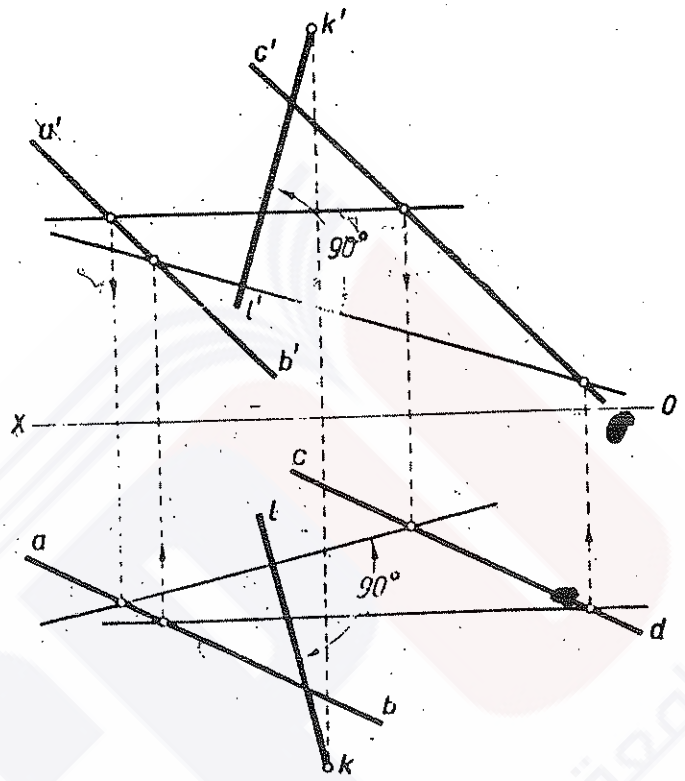
شكل رقم (٢٠٠)

٣٣ـ حدد المسافة بين النقطة A والمستوي P (الشكل ٢٠١) .



شكل رقم (٢٠١)

الحل : المسافة المطلوبة تساوي طول مقطع العمود المقام من A على المستوي P . لهذا الغرض ننزل من النقطة (a,a') مستقيما يعامد المستوي P ونحدد نقطة تقاطعه (b,b') مع هذا المستوي (المسقط الأفقي لهذه النقطة يحدد مباشرة من



شكل رقم (١٩٩)

المستوي ، وبذلك نحصل على مستقيم KL(k1 , k'1') يعامد المستوي P ويمر من النقطة K .

٣٢ـ حدد المسافة بين النقطة A والمستوي P المحدد بأثريه P_v و P_h .

الحل : تحدد المسافة بين النقطة A والمستوي P بطول مقطع العمود المقام من النقطة A على المستوي P .

آ ـ نقيم من النقطة A مستقيما يعامد المستوي P ، لهذا نمرر من النقطة a مستقيما يعامد P_h ومن النقطة a' مستقيما يعامد فنحصل على مستقيم يعامد المستوي P .

ب ـ لتحديد المسافة المطلوبة بين A والمستوي P ، نمرر

مستقيما مارا من a ويوازي خط الأرض (الشكل ١٩٨ ب) ، ونرسم من a مستقيما يعامد ab فنحصل على ad المسقط الأفقي لأفق المستوي AD ويوكون مسقطه الأمامي a'd' مستقيما مارا من a' ويوازي خط الأرض . وبذلك يكون المستوي P المحدد بجبهته AC وأفقه AD عموديا على مقطع المستقيم AB ومارا من النقطة A .

ب – مساقط المستقيم العمودي على مستو تكون عمودية على آثاره المماثلة (الشكل ١٩٨ جـ) . لذلك يكفي تحديد نقطة واحدة من كل أثر لرسم آثار المستوي المطلوب . لهذا الغرض ، واستنادا الى الشروط السابقة نمرر من a مستقيما يعامد ab فيقطع خط الأرض في النقطة n وهي تمثل المسقط الأفقي للأثر الأمامي لأفق المستوي . نحدد المسقط الأمامي n' من تقاطع المسقط الأمامي لأفق المستوي المار من a' والموازي لخط الأرض مع خط التداعي العمودي على خط الأرض . نمرر من n' مستقيما يعامد a'b' فنحصل على الأثر الأمامي P_v للمستوي المطلوب الذي يقطع خط الأرض في النقطة P_x ومنها نرسم مستقيما يعامد ab فنحصل على الأثر الأفقي P_h لهذا المستوي .

٣١ـ المطلوب اقامة عمود من النقطة K على المستوي المحدد بالمستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ١٩٩) .

الحل :

آ – نرسم في موقع كيفي من المستقيمين AB و CD أفق المستوي وجبهته ونحدد مساقطهما الأفقية والأمامية .

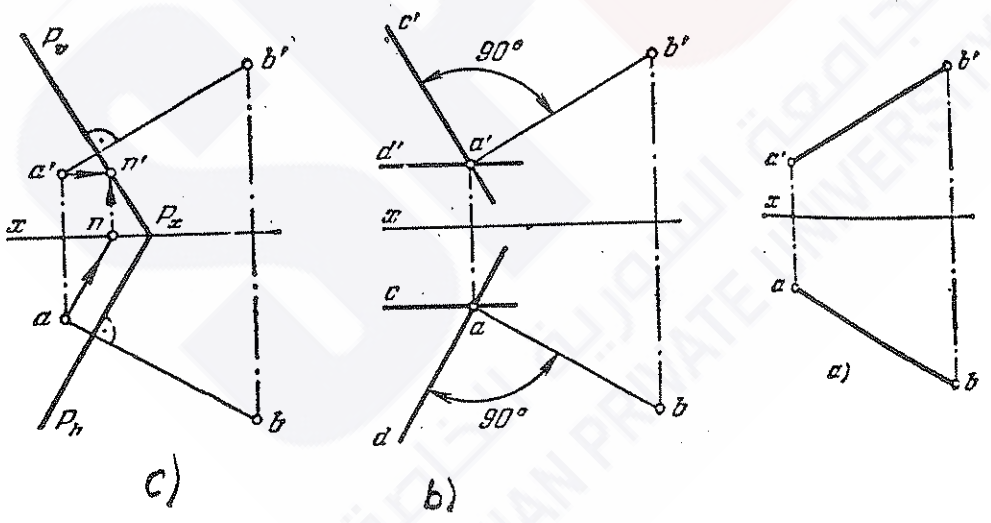
ب – من k نرسم مستقيما kl يعامد المسقط الأفقي لأفق المستوي . ومن النقطة k' نرسم مستقيما k'l' يعامد المسقط الأمامي لجبهة

حدد المستوي المطلوب : آ ـ بمستقيماته الرئيسية ٠

ب ـ بأثريه ٠

الحـــــل :

آ ـ حسب قاعدة اسقاط الزاوية القائمة التي أحد أضلاعها يوازي مستـــــوي الاسقاط ، ولأن المستقيمات الرئيسية للمستوي وهي أفق وجبهـــــــة المستوي توازي مستوي الاسقاط الأفقي والأمامي على التوالي ، وبمـــا أن المستقيم العمودي على مستو يعامد المستويات الواقعة فيه ، لذلـــك يكون مسقط العمود الأفقي عموديا على المسقط الأفقي لأفق المستـــوي ومسقطه الأمامي عموديا على المسقط الأمامي لجبهة المستوي ٠ عـــلى



شكل رقم (١٩٨)

هذا الأساس نرسم من a' مستقيما يعامد a'b' فنحصـــل عـلى a'c' المسقط الأمامي لجبهة المستوي AC ويكون مسقطه الأفـــــــقي ac

ـ **الطريقة الثانية :** نستخدم شروط توازي مستويين ، والتي تنص على أن في كل مستويين متوازيين لابد من وجود مستقيمين متقاطعين في أحدهما يوازيان مستقيمين متقاطعين في الآخر • لذلك نتبع الخطوات التالية : (الشكل ١٩٧)

١ـ نرسم مستقيما أفقيا كيفيا في مستوي المثلث ABC يمر من النقطة A • لهذا الغرض نمرز من 'a مستقيما يوازي خط الأرض فيقطع 'b'c في النقطة 'k ونحدد المسقط الأفقي k على bc • نصل ak فنحصل على المسقط الأفقي لأفق المستوي AK •

٢ـ نرسم مستقيما أفقيا كيفيا في المستوي P • لهذا الغرض نختار نقطة كيفية ('v,v) على الأثر الأمامي P_v ونمرر من 'v مستقيما يوازي خط الأرض ومن v مستقيما يوازي P_h •

٣ـ ندرس الوضعية المتبادلة لهذين المستقيمين ، فاذا كانا متوازيين نأخذ في كل مستو مستقيما أماميا كيفيا ، فاذا توازى هذان الأخيران كان المستويان متوازيين • أما اذا لم يكن أحد المستقيمين الأفقي أو الأمامي في أحد المستويين يوازي نظيره في المستوي الآخر فان المستويين غير متوازيين • لذلك نجد في مثالنا هذا ودون اللجوء لرسم المستقيمات الأمامية أن المستويين غير متوازيين •

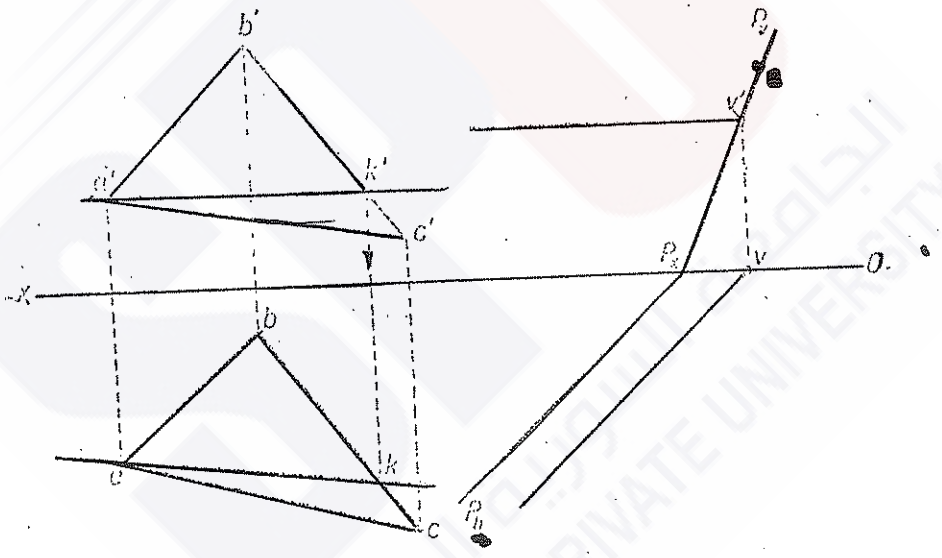
* **ملاحظة :** في مثالنا هذا ، كان يمكن الاكتفاء برسم المستقيم الأفقي الكيفي AK في المثلث ABC للتوصل للحل المطلوب ، (هل تستطيع تعليل ذلك ؟) •

و ـ تعامد مستقيم ومستو وتعامد المستويات معا :

٣٠ـ مرر من النقطة A مستويا يعامد مقطع المستقيم AB (الشكل ١٩٨ آ).

لجميع العناصر الواقعة عليه تنطبق على أثره الجانبي بمافيها المسقط الجانبي "a للنقطة A التي يمر منها المستوي المطلوب . لذلك نمرر من "a مستقيما (الشكل ١٩٦) يوازي P_w فنحصل على الأثر جانبي Q_w . بعد ذلك نرسم حسب قواعد الاسقاط العامة ، كما هو واضح من الشكل (١٩٦) الأثرين الأمامي Q_v موازيا P_v و Q_h موازيا P_h ، وهو المطلوب .

٢٩ـ هل يتوازى مستوي المثلث ABC مع المستوي P المحدد بأثريه ؟



شكل رقم (١٩٧)

الحـــل :

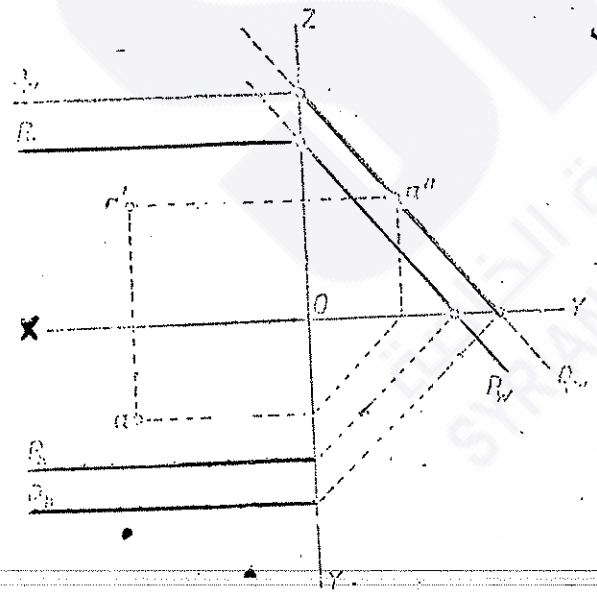
ـ **الطريقة الأولى :** نحدد أثري مستوي المثلث ABC الأمامي والأفقي ونتحقق من توازي الآثار المتماثلة . (نترك للطالب التوصل الى النتيجة بهذه الطريقة) .

الأفقي P_h للمستوي المعلوم P . لهذا نمرر من النقطة a مستقيما يوازي P_h ويقطع خط الأرض في النقطة n (وهي المسقط الأفقي للأثر الأمامي لأفق المستوي المطلوب) . نقيم من n خط تداع يعامد خط الأرض ونرسم من 'a مستقيما يوازي خط الأرض فيقطع خط التداعي في نقطة 'n (المسقط الأمامي للأثر الأمامي للمستوي المطلوب المنطبق على الأثر الأمامي N نفسه) .

جـ - نمرر من 'n مستقيما يوازي P_v فنحصل على Q_v الأثر الأمامي للمستوي المطلوب الذي يقطع خط الأرض في Q_x .

د - نرسم من Q_x مستقيما يوازي P_h فنحصل على Q_h الأثر الأفقي للمستوي المطلوب . وبذلك نحصل على المستوي Q المحدد بأثريه الأمامي Q_v والأفقي Q_h والموازي للمستوي P وهو المطلوب .

٢٨- مرر من النقطة A مستويا Q يوازي المستوي الاسقاطي الجانبي P المحدد بآثاره والذي يوازي خط الأرض .

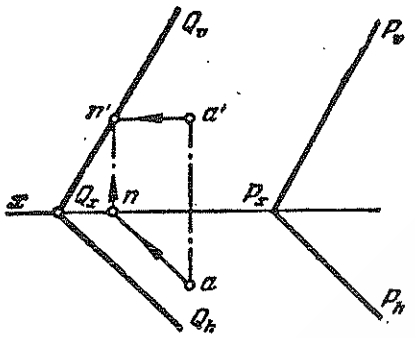


شكل رقم (١٩٦)

الحل : نستخدم التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي للحل لأن المستوي P مستو اسقاطي جانبي .

ا - المستوي المطلوب Q يكون أيضا مستويا اسقاطيا جانبيا ولهذا فان المساقط الجانبية

ومسقطه الأفقي ينطبق على خـــط الأرض ٠ ونعتبر الأثر الأفقي P_h أفق المستـــوي مسقطه الأفقي يتطابق معه ومسقطه الأمامي ينطبق على خط الأرض ، وبذلك يمكننـــا اعتبار المستوي P محدد بمستقيميـــن متقاطعين هما أثريه الأمامي والأفقـــي ٠



شكل رقم (١٩٥ جـ)

لهذا وكما في المثال السابق نمرر من 'a مستقيمين 'a'b يوازي P_v و'a'c يوازي خط الأرض ، ونمرر من a مستقيمين ac يوازي P_h و ab يـــوازي خط الأرض ٠ وبذلك نكون قد حصلنا على مسقطي جبهة المستوي المطلوب AC (ac,ac') وعلى مسقطي أفق هذا المستوي AB(ab,a'b') الموازيين للأثريـــن P_v و P_h على التوالي فنحصل على المستوي المطلوب والموازي للمستوي P

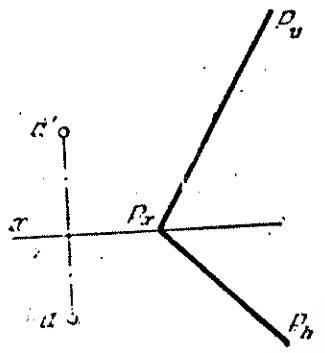
الطريقة الثانية : (الشكل ١٩٥ جـ)

بما أن آثار المستويات المتوازية المماثلة متوازية أيضا فاننا سنحاول تحديد المستوي المطلوب بأثريه الأمامي والأفقي ٠

آ ـ من موضوعة المستقيمات الخاصة في المستوي نعلم أن المسقط الأفـــقي لأفق المستوي يوازي أثر المستوي الأفقي والمسقط الأمامي لجبهـــــة المستوي يوازي أثر المستوي الأمامي ، وحسب بديهيات التوازي فانـــه اذا كان مستقيمان متوازيين فان المستقيم الثالث الذي يوازي أحدهمـــا يوازي الآخر أيضا ٠ من جهة أخرى ، تقع نقطة في مستو اذا وقعـــت على أحد مستقيماته ٠

ب ـ لذلك يكون المسقط الأفقي لأفق المستوي المطلوب موازيا للأثـــــر

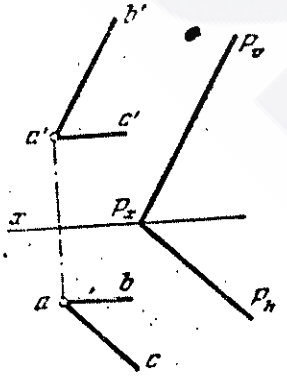
المتوازية تكون متوازية أيضا ، ومستقيمات أفق المستوي لهذه المستويات تتوازى كذلك. من جهة أخرى فان الآثار المتماثلة للمستويات المتوازية تتوازى أيضا (الشكل ١٩٥ آ) . ويمكننا اعتبار الأثر الأمامي للمستوي جبهة مستوي واقع في مستوي الاسقاط الأمامي والأثر الأفقي للمستوي أفق مستو واقع في مستوي الاسقاط الأفقي . لذلك يمكننا حل هذه المسألة بطريقتين :

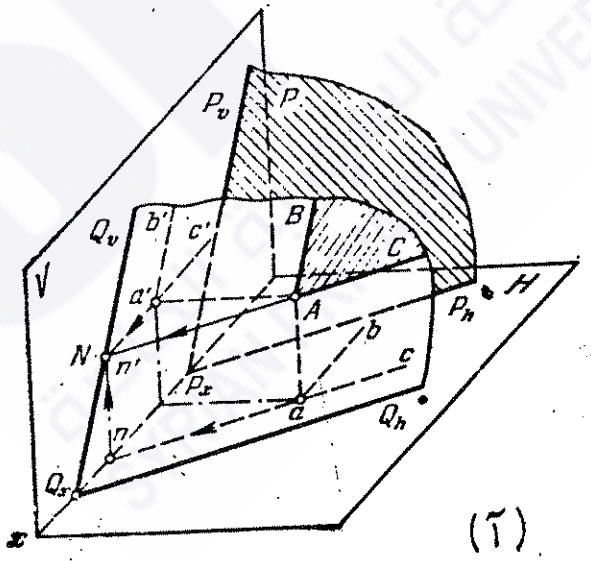


شكل رقم ١٩٤

الطريقة الأولى : (الشكل ١٩٥ ب)

نعتبر الأثر الأمامي P_v جبهة المستوي P مسقطه الأمامي ينطبق

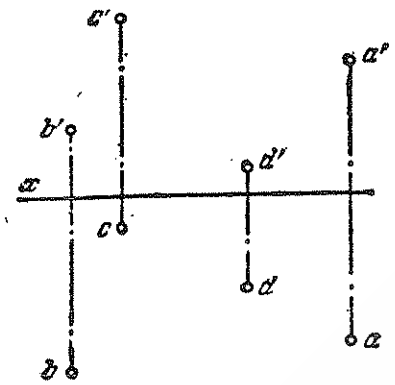




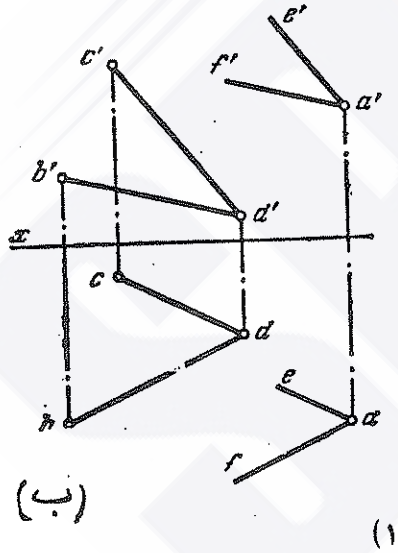
(آ)

شكل رقم (١٩٥)

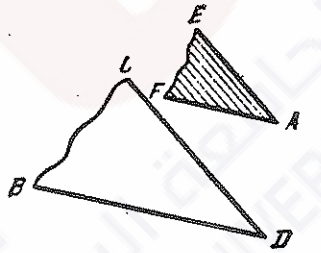
مستقيمين متقاطعين في الثاني (الشكل ١٩٣ آ) ٠ على هذا الأساس ، لتحديد المستوي المطلوب نمرر من النقاط المحددة للمستوي المعلوم B و C و D مستقيمين متقاطعين BD و CD (الشكل ١٩٣ آ و ب) ٠ بعد ذلك نمرر من a' مستقيما a'f' يوازي b'd' ومستقيما a'e' يوازي c'd' ونمرر من a مستقيمين af يوازي bd و ae يوازي cd وبهذا نحصل على مستقيمين AF و AE يوازيان



شكل رقم (١٩٢)



(ب)



(آ)

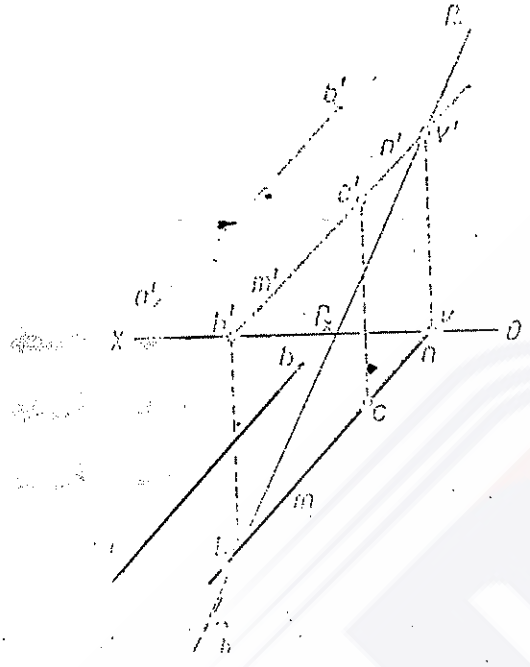
شكل رقم (١٩٣)

المستقيمين BD و CD على التوالي ، وبذلك يكون المستوي المار من النقطة A والمحدد بالمستقيمين AF و AE موازيا للمستوي المحدد بالنقاط B و C و D ٠ وهو المطلوب ٠

٢٧ـ مرر من النقطة A مستويا يوازي المستوي P (الشكل ١٩٤) ٠

الحل : كما هو معلوم ، مستقيمات جبهة المستوي في المستويات

المستوي ويوازي المستقيم AB . لذلك نمرر من النقطة C مستقيما يوازي AB فتكون مساقطه موازية لمساقط المستقيم AB . لهذا نمرر من c' (الشكل ١٩١) مستقيما يوازي a'b' فيقطع خط الأرض في النقطة h' ونرسم من c مستقيما يوازي ab فيقطع خط الأرض في نقطة v . النقطة h' تمثل المسقط الأمامي للأثر الأفقي للمستقيم المار من النقطة C والنقطة v تمثل المسقط الأفقي للأثر الأمامي لهذا المستقيم . نحدد وفق قواعد الأسقاط المسقط الأفقي h المتطابق مع الأثر الأفقي H نفسه على المستقيم المار من c ونحدد المسقط الأمامي v' المتطابق مع الأثر الأمامي V نفسه على المستقيم المار من c' وبذلك نحصل على مسقطي المستقيم MN الموازي للمستقيم AB : الأمامي m'n' والأفقي mn وأثري هذا المستقيم : الأمامي (v,v') والأفقي (h,h') . الأثر الأمامي P_v للمستوي P يمر من v' وأثره الأفقي P_h يمر من h ،ولما كان الأثران على استقامة واحدة فان المستقيم المار من h و v' يمثل هذين الأثرين ويقطع خط الأرض في النقطة P_x .



شكل رقم (١٩١)

٢٦ـ مرر من النقطة A مستويا يوازي المستوي المحدد بالنقاط B و C و D (الشكل ١٩٢) .

الحل : يتوازي مستويان اذا توازى مستقيمان متقاطعان في الأول مع

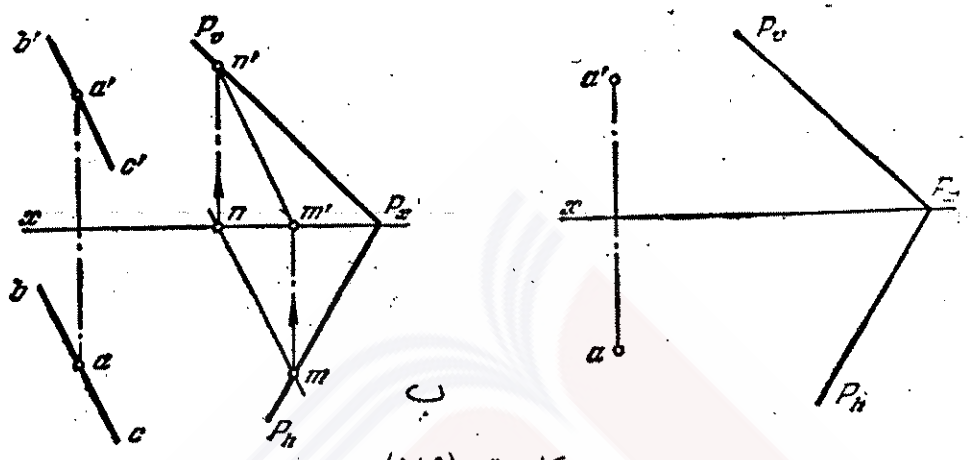
في المستوي P مستقيما يوازي المستقيم AB ، مساقط هذا المستقيم يجب أن توازي مساقط المستقيم AB المماثلة .

ب ـ على هذا الأساس نرسم مستقيما c'd' (الشكل ١٩٠ ب) يوازي a'b' ونفترض أن هذا المستقيم يمثل المسقط الأمامي لمستقيم CD ينتمي للمستوي P ، لذلك آثار هذا المستقيم تقع على الآثار المماثلة للمستوي P . نمد d'c' فيقطع P_v في النقطة n' ويقطع خط الأرض في نقطة m' . النقطة n' المسقط الأمامي للأثر الأمامي للمستقيم CD المتطابق مع مسقطه هذا . نحدد مسقطه الأفقي n على خط الأرض . النقطة m' تمثل المسقط الأمامي للأثر الأفقي للمستقيم CD الذي يقع ومسقطه الأفقي m المتطابق معه على الأثر الأفقي P_h للمستوي P . لذلك نقيم من m' خط تداع يعامد خط الأرض فيقطع امتداد P_h في النقطة m . من جهة أخرى ، النقطتين n و m تقعان على المسقط الأفقي للمستقيم CD ، لذلك نمرر منهما مستقيما ونحدد عليه المسقطين الأفقيين c و d فنحصل على المسقط الأفقي cd لمقطع المستقيم CD المنتمي للمستوي P .

جـ ـ من الشكل الحاصل (الشكل ١٩٠ ب) نلاحظ أن cd لايوازي ab وهذا يعني أن المستقيمين AB و CD غير متوازيين وبالتالي المستقيم AB لايوازي المستوي P .

٢٥ـ مرر من النقطة C مستويا P في حالته العامة يوازي المستقيم AB وحدد أثريه P_h و P_v الواقعين على استقامة واحدة .

الحل : اتجاه أثري المستوي المطلوب معلوم ، ولذلك يكفي تحديد نقطة واحدة لكل منهما . هاتان النقطتان يمكن أن تكونا أثري مستقيم ينتمي لهذا



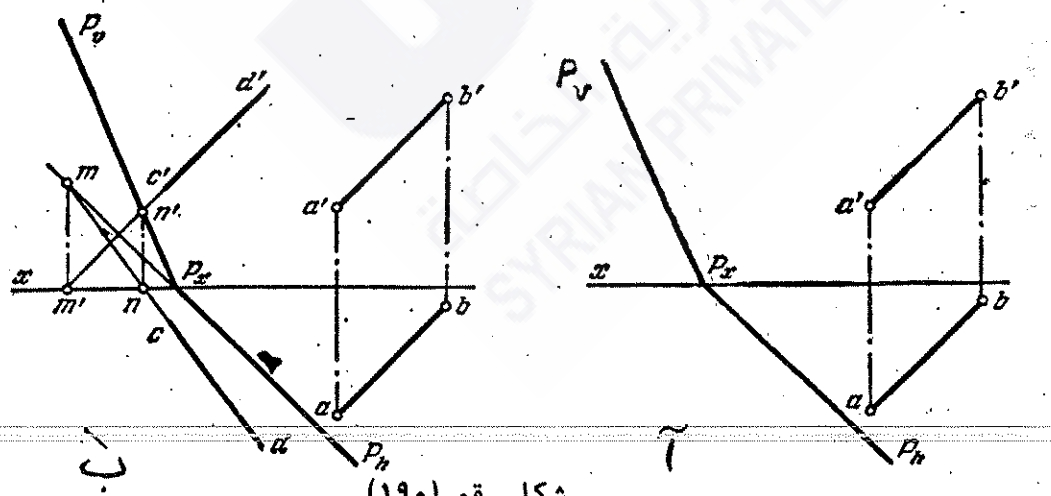
شكل رقم (١٨٩)

على مساقط المستقيم BC المار النقطة A والموازي للمستوي P وهو المطلوب .

٢٤ـ هل يوازي المستقيم AB المستوي P (الشكل ١٩٠ آ) ؟

الحل : المستقيم AB يوازي المستوي P اذا وازى أحد مستقيمات المستوي .

آ ـ للتحقق من وضعية المستقيم AB بالنسبة للمستوي P نحاول أن نرسم



شكل رقم (١٩٠)

جـ ـ المستقيمان 2-1 و 4-3 يتقاطعان في النقطة M(m,m') والمستقيمان 6-5 و 8-7 يتقاطعان في النقطة N(n,n') . نصل النقطتين N و M فنحصل على MN(mn,m'n') خط التقاطع المطلوب .

* **ملاحظة مهمة** : ان اختيار المستويات المساعدة عملية كيفية غير محـــددة بوضعية معنية . لذلك يتم اختيار الحالة الخاصة للمستوي المساعد المناسبة لحل المسألة المعينة حسب طبيعتها ومستوى تعقيدها .

هـ ـ **توازي مستقيم ومستو وتوازي المستويات :**

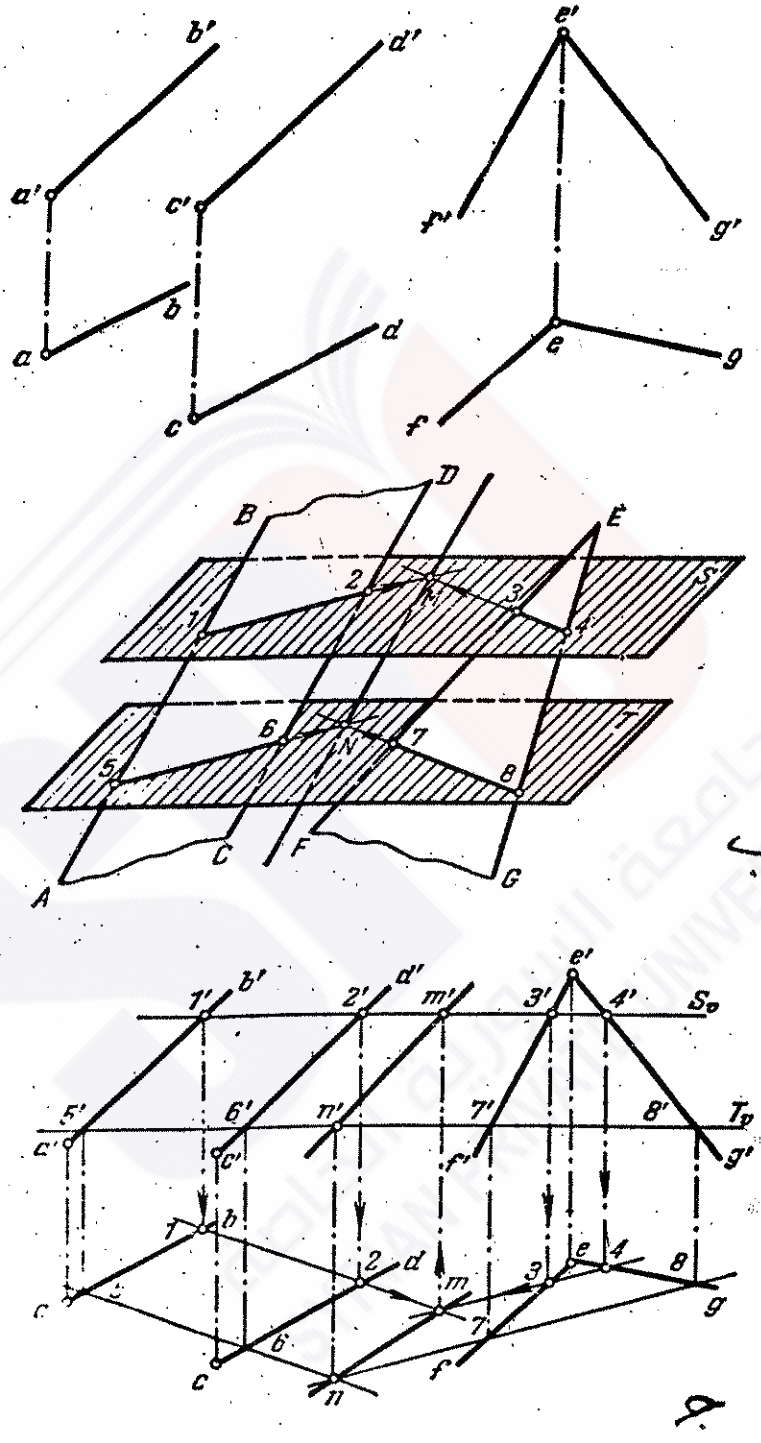
٢٣ـ مرر من النقطة A مستقيما كيفيا يوازي المستوي P المحدد بأثريـــه (الشكل ١٨٩ آ) .

الحـــــل :

آ ـ يوازي مستقيم مستويا اذا وازى أحد مستقيماته على الأقل . لذلك نرسم مستقيما كيفيا (في حالته العامة) MN منتميا للمستوي .

ب ـ ينتمي مستقيم الى مستو اذا كانت نقطتان منه على الأقل منتمية لهـــذا المستوي أو اذا كانت آثاره واقعة على الآثار المماثلة للمستوي . لذلك نختار نقطتين كيفيتين N(n,n') واقعة على الأثر الأمامي P_v للمستوي و M(m,m') واقعة على الأثر الأفقي P_h . نصل n و m فنحصل على المسقط الأفقي mn ونصل n' و m' فنحصل على المسقط الأمـــامي m'n' للمستقيم الكيفي MN المنتمي للمستوي P (الشكل ١٨٩ ب) .

جـ ـ حسب قاعدة اسقاط المستقيمات المتوازية والتي تنص على أن : المستقيمات المستقيمات المتوازية المتماثلة تكون متوازية أيضا) . نرسم من a مستقيما bc يوازي mn ومن a' مستقيما b'c' يوازي m'n' فنحصل


b'
d'
a'
c'
e'
f'
g'
a
b
d
e
g
c
f
D
B
E
2
M
3
1
4
S
6
N
7
T
5
8
C
F
A
G
ب
1'
b'
2'
d'
m'
3'
e'
4'
S₀
5'
6'
n'
7'
8'
T₀
a'
c'
f'
g'
1
b
2
d
m
3
e
4
8
a
5
7
6
c
n
f
g
ج

شكل رقم (١٨٨)

$N(n,n')$. نصل N و M ، فنحصل على خط التقاطع المطلـــــــوب $MN(mn\,,\,m'n')$.

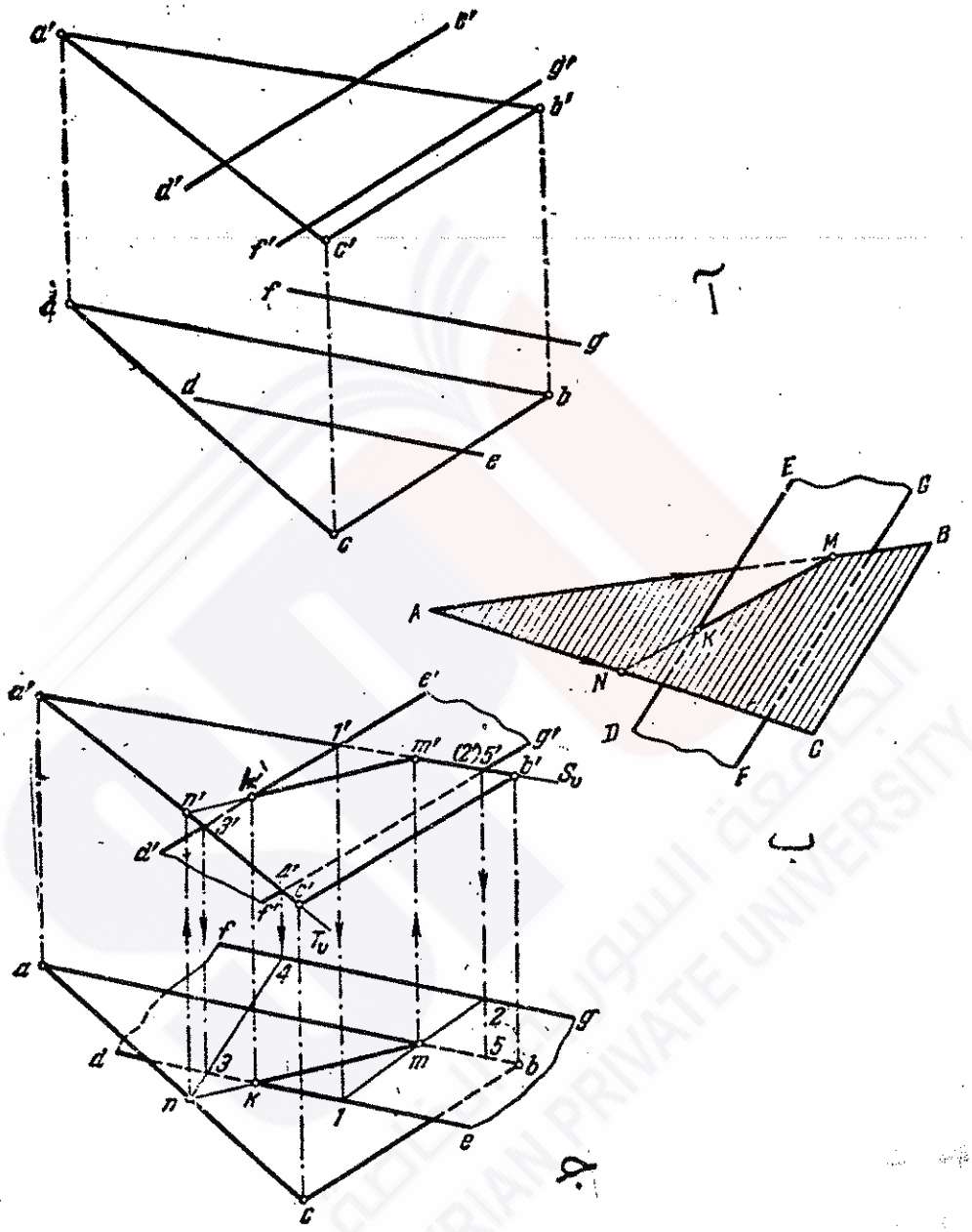
ب ـ لتحديد الوضع المتبادل للمستويين المتقاطعين ، ونعني بذلك تحديـد الأجزاء المخفية والمرئية لكل منهما في الاسقاطين الأمامي والأفـــقي ، نستخدم طريقة تحليل وضع نقاطهما التي اتبعناها في المثال (١٠) مـــن الفقرة (ب) في هذا الفصل . مثلا : ندرس وضعية النقطتيـــن 2 ، الواقعة على المستقيم FG ، و 5 ، الواقعة على المستقيـــم AB ، فنجد في الاسقاط الأمامي أن النقطة 5 تغطي النقطة 2 وهذا يعنـــي أن المستقيم AB في هذا الموقع يمر أمام المستقيـــــم FG ، أي أن : المثلث ABC مرئي في هذا الموقع حتى المستقيم KM . بقيـــــــة العمليات موضحة على الشكل .

٢٢ـ حدد خط تقاطع المستوي المحدد بالمستقيمين المتوازيـــن AB و CD مع المستوي المحدد بالمستقيمين المتقاطعين FE ، EG (الشكـــل ١٨٨ آ) .

الحـــــل :

آ ـ لايجاد النقاط المشتركة بين المستويين نستخدم مستويين مساعديـن S و T (الشكل ١٨٨ ب) ونحدد خطوط تقاطعهما مع المستويـــــن المعنيين . خط التقاطع المطلوب يمر من نقطتي M و N تقاطع هذه الخطوط .

ب ـ المستويان المساعدان T و S يوازيان مستوي الاسقاط الأفـــــقي H ، ولهذا فانهما يقطعان المستويين المعنيين بمستقيمات أفقيـــة 2-1 و 4-3 و 6-5 و 8-7 (راجع المثال ـ ١٩ـ من هذا الفصل) .



شكل رقم (١٨٧)

يتقاطع مع المستوي المحدد بالمستقيمين المتوازيين بخط تقاطـــــع (34,3'4') 34 • خط التقاطع هذا يتقاطع مع المستقيم AC بالنقطـــة

جـ ـ نصل النقطتين k_1 و k_2 فنحصل على خط التقاطع $(k_1k_2, k'_1k'_2)$.

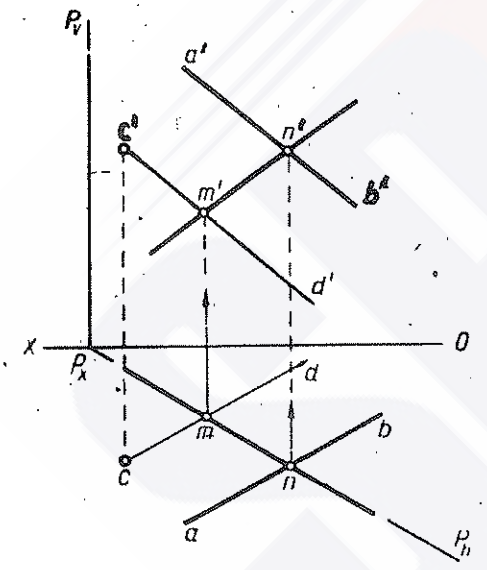
د ـ مقطعا المستقيمين Ak_1 و Ck_2 يكونان مخفيين في الاسقاط الأفقي ، أي أن المقطعين ak_1 و ck_2 من المسقط الأفقي للمستقيمين ab و cb يرسمان بخط متقطع (هل تستطيع التأكد من صحة ذلك ؟) .

٢٠ـ حدد خط تقاطع المستوي الاسقاطي الأفقي P مع المستوي المحدد بالمستقيم AB والنقطة C (الشكل ١٨٦) .

هنالك منطلقان لحل هذا المثال :

الحل الأول :

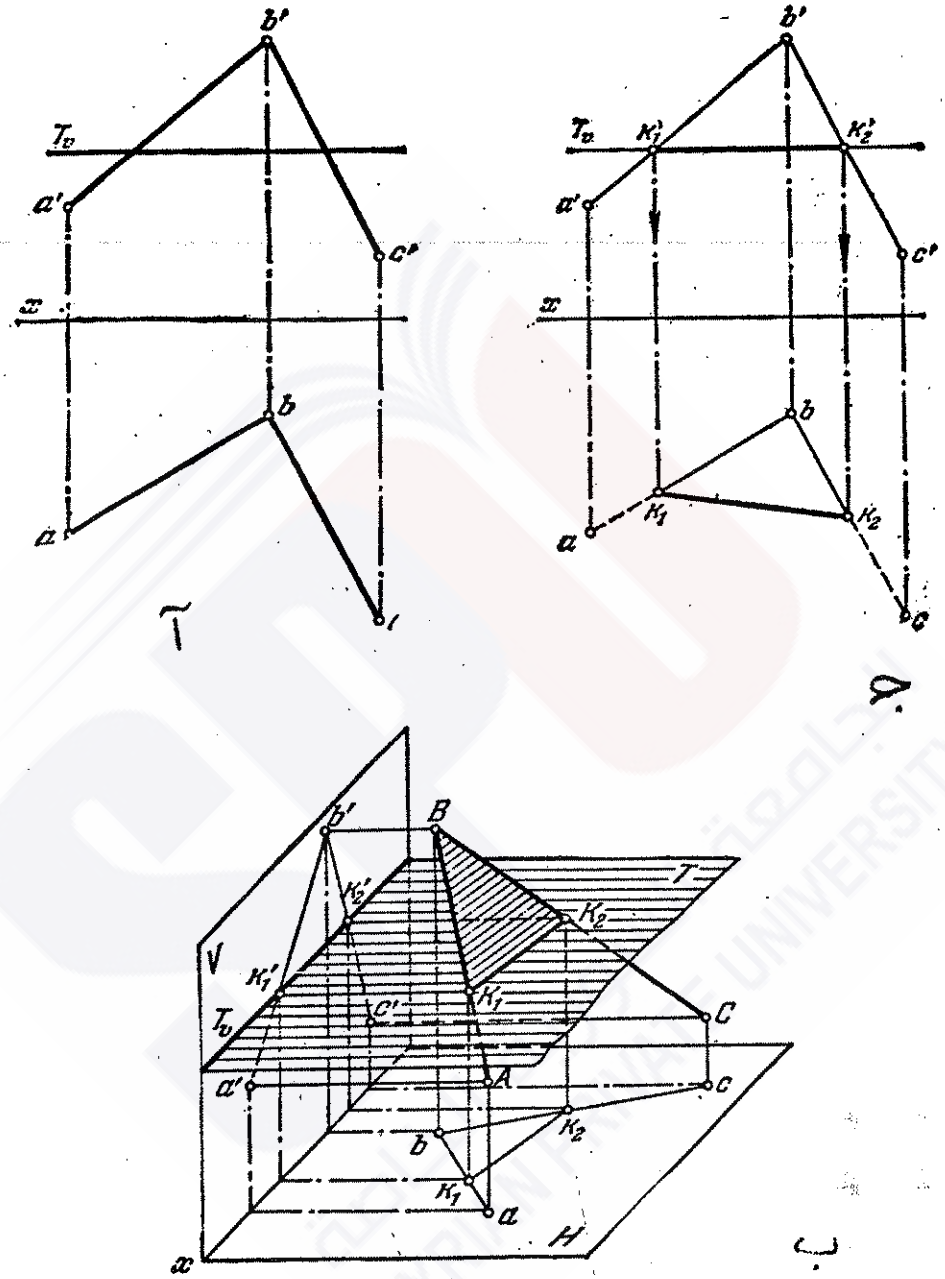
آ ـ يمكن تحديد خط التقاطع اذا عرفنا نقطتين مشتركتين بين المستويين . النقطة C(c,c') لايمكن أن تكون احدى هاتين النقطتين (هل تستطيع تعليل ذلك ؟).



شكل رقم (١٨٦)

ب ـ لايجاد مثل هاتين النقطتين نغير عناصر تحديد المستوي الثاني من مستقيم ونقطة الى مستقيمين متوازيين وذلك برسم مستقيم من القطة c يوازي ab ورسم مستقيم من c' يوازي a'b' فيصبح المستوي محددا بالمستقيمين المتوازيين AB(ab,a'b') و CD(cd,c'd') .

جـ ـ بعد ذلك نحدد ، بالطريقة المتبعة في الأمثلة السابقة ، نقطتي (m,m') و (n,n') تقاطع المستوي P مع المستقيمين C D و A B .



ـ شكل رقم (١٨٥)

الفقرة (جـ) السابقة من هذا الفصل (الشكلان ١٨٥ ب و جـ) .

يمثلان نقطتي تقاطع R_h مع المسقطين الأفقيين cd و ed والمسقطان الأماميان 'm و'n يمثلان نقطتي تقاطع R_v مع المسقطين الأماميين 'c'd و'e'd لضلعي المثلث CDE) .

ب ـ نلاحظ من معطيات السؤال (الشكل ١٨٣ آ) ، ومن الشكلين (١٨٣ ب) و (١٨٤) أن المستقيمين AB و MN مستقيمان جانبيان . لذلك نستخدم التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي (الشكل ١٨٢) لتحديد نقطة تقاطعهما K .

جـ ـ المسقطان "a"b و "m"n يتقاطعان في النقطة "k المسقط الجانبي لنقطة التقاطع المطلوبة K .

د ـ نحدد وفق قواعد الاسقاط العامة المسقطين الأفقي k على ab والأمامي 'k على 'a'b ، وهو المطلوب .

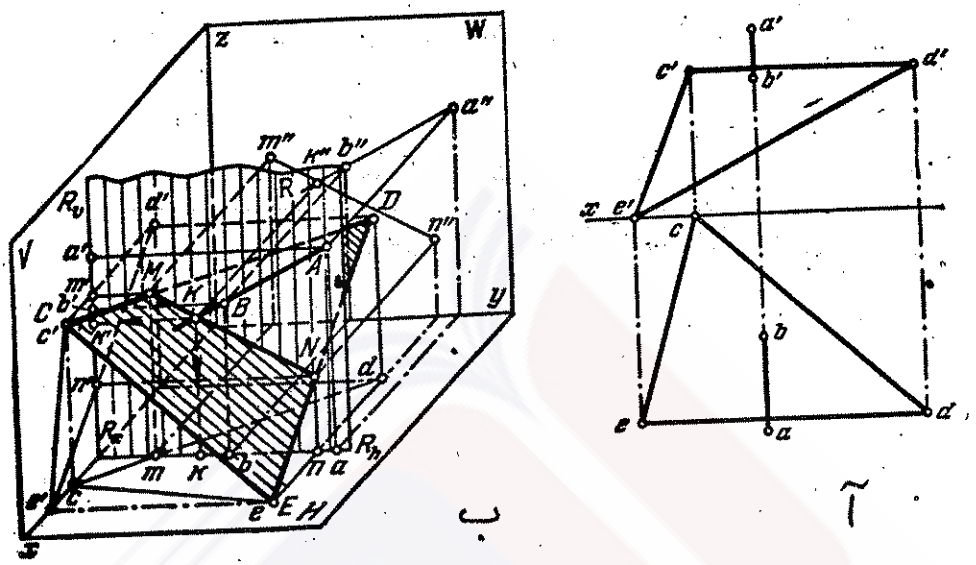
هـ ـ تقاطع مستويات محددة بغير آثارها :

١٩ـ حدد خط تقاطع المستوي T المحدد بأثره T_v مع المستوي المحدد بالمستقيمين المتقاطعين AB و CB (الشكل ١٨٥ آ) .

الحل :

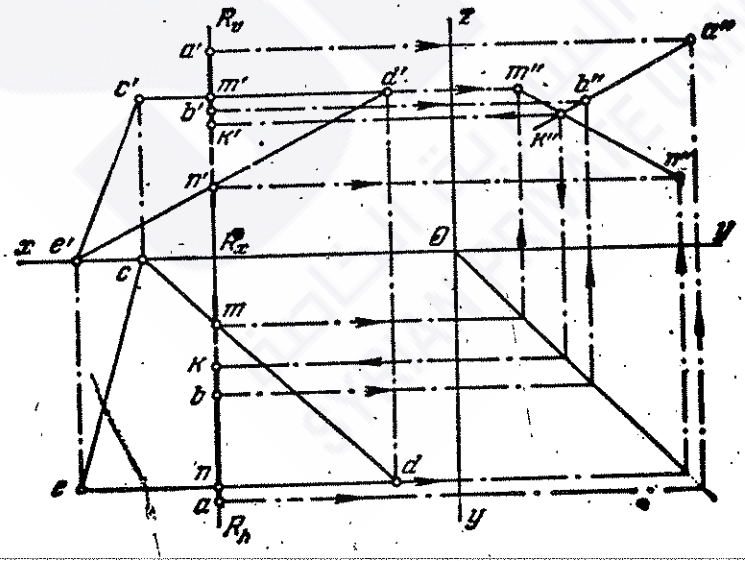
آ ـ كما هو معلوم ، لتحديد خط تقاطع مستويين يكفي معرفة نقطتين مشتركتين بينهما أو معرفة نقطة مشتركة واحدة اذا كان اتجاه خط التقاطع معلوما . لذلك يمكننا تحديد خط التقاطع المطلوب في مثالنا هذا ، اذا عرفنا نقطتي k_1 و k_2 تقاطع المستقيمين AB و CB مع المستوي T (الشكل ١٨٥ ب) . .

ب ـ تحديد النقطتين $k_1(k_1,k_1')$ و $k_2(k_2,k_2')$ يتم وفق الطرق المتبعة في

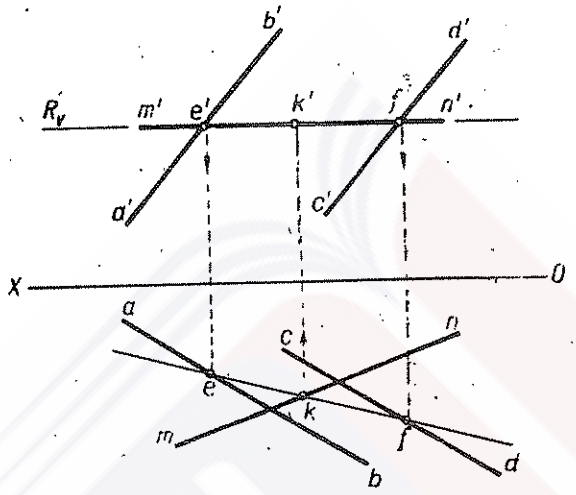


شكل رقم (١٨٣)

(فراغيا الشكل ١٨١ ب ، واسقاطيا الشكل ١٨٤) . هذا المستـــــوي يقطع مستوي المثلث CDE بالمستقيم MN (المسقطان الأفقيان m و n



شكل رقم (١٨٤)



شكل رقم (١٨٢)

فان نقطتي 'f و 'e تقاطع R_V مع 'c'd و 'a'b تمثلان المسقطين الأماميين لنقطتي تقاطع المستقيمين CD و AB مع المستوي R ٠ نحدد وفق قواعد الاسقاط العامة المسقطين الأفقيين f و e لهاتين النقطتين ، وبذلك يكون المستقيم ef المسقط الأفقي لخط تقاطع المستويين P و R ٠

جـ ـ نقطة k تقاطع mn و ef هي المسقط الأفقي لنقطة تقاطع المستقيم MN مع المستوي P ٠ نحدد مسقطها الأمامي 'k على 'm'n ٠

١٨ـ حدد نقطة تقاطع المستقيم AB والمستوي المحدد بالمثلث CDE (الشكل ١٨٣) ٠

الحـــل :

آ ـ نمرر من المستقيم AB مستويا R يوازي مستوي الاسقاط الجانبي W

الفصل . لذلك ولتحديد هذه الأجزاء في المسقط الأمامي نأخذ النقطتين 1 و 3 وننظر باتجاه السهم S (الشكل ١٨١ آ) فنجد أن المسقط الأفقي 3 (وهي نقطة منتمية للمستقيم AB) أبعد من المسقط الأفقي 1 (وهي نقطة منتمية لمستوي المثلث CDE) ، لذلك تكون النقطة 3 مرئية لأنها الأبعد عن مستوي الاسقاط الأمامي ، وهذا يعني أن الجزء b'k' يكون مرئيا وبعد k' يصبح غير مرئي (مخفي) ، وبالطريقة نفسها نحدد الأجزاء المرئية والمخفية في الاسقاط الأفقي وذلك بالنظر باتجاه السهم S_1 لوضع النقطتين 5 (منتمية لمستوي المثلث CDE) و 4 (منتمية للمستقيم AB) .

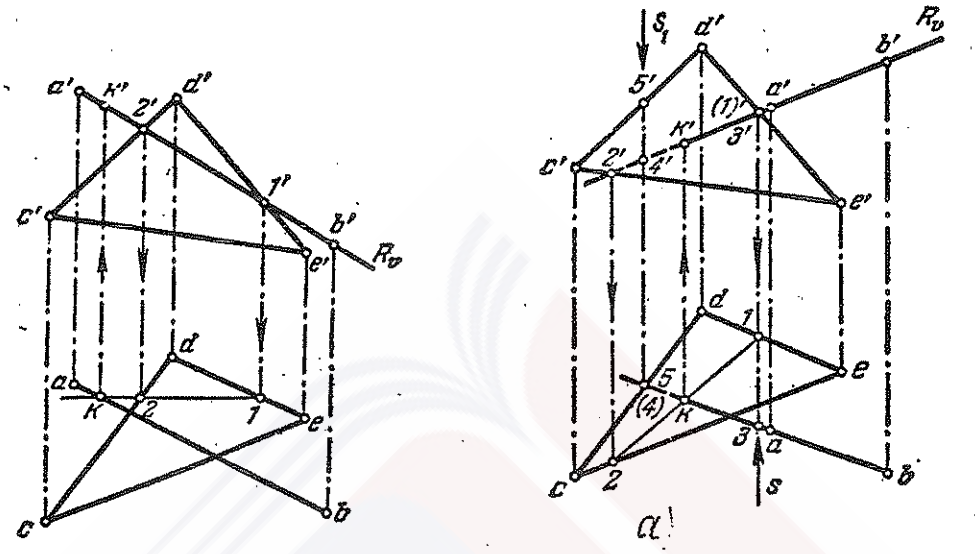
و ـ في بعض الحالات،لأوضاع متبادلة بين العنصرين الهندسيين تختلف عن الحالة المدروسة السابقة ، نجد أن نقطة التقاطع تقع خارج حدود مستوي المثلث (الشكل ١٨١ ب) ، وهذا يعني أن المستقيم AB يقطع مستوي المثلث خارج الحدود التي تحدده ، أي يقطع امتدادات المثلث . لذلك ، الجزء المخفي من المستقيم AB يقع خلف النقطة K (الى يسارها) .

١١ـ حدد نقطة تقاطع المستقيم MN مع المستوي P المحدد بالمستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ١٨٢) .

الحـــل :

ـ نمرر من المستقيم AB مستويا مساعدا R يوازي مستوي الاسقاط الأفقي فيتطابق أثره الأمامي R_v مع المسقط الأمامي m'n' للمستقيم MN (هل تستطيع تعليل ذلك ؟) .

ب ـ حسب الاستنتاجات التي توصلنا اليها في الفقرة (ب) من هذا الفصل



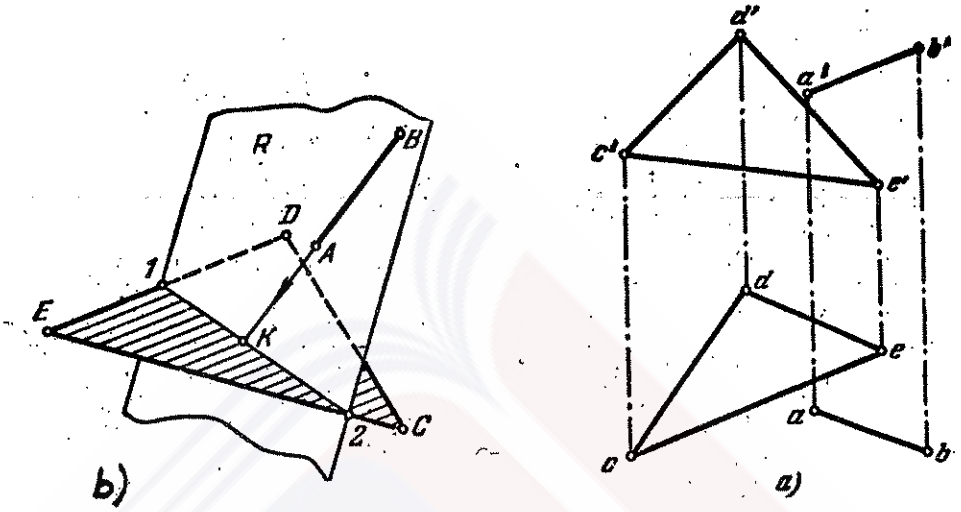
شكل رقم (١٨١)

جـ ـ بعد ذلك نحدد خط تقاطع المستويين R والمثلث CDE ٠ لهذا الغرض نستخدم الاستنتاجات التي توصلنا اليها في المثال(١٢) من الفقرة (ب) في هذا الفصل ، فنحدد نقطة(1,1')1 تقاطع المستقيم ED مع المستوي R ونحدد نقطة (1,1')1 تقاطع المستقيم ED مع المستوي R وبذلك نحصل على نقطتين مشتركتين بين R ومستوي المثلث CDE ٠ نصل النقطتين فنحصل على(12,1'2')12 خط تقاطع المستويين ٠

د ـ نقطة تقاطع ab و 12 تحدد المسقط الأفقي k لنقطة K تقاطع المستقيم AB مع مستوي المثلث CDE ٠ نحدد مسقطها الأمامي k' على a'b' وفق قواعد الاسقاط العامة ٠

هـ ـ لتتحديد الأجزاء المرئية والمخفية من مقطع المستقيم AB ندرس وضعية بعض نقاط العنصرين الهندسيين المعنيين (المستقيم AB والمثلث CDE) بالطريقة المشار اليها في المثال(١٠) من الفقرة (ب) في هذا

الحـــل :



شكل رقم (١٨٠)

آ ـ كما هو معلوم ، لايجاد نقطة تقاطع مستقيم مع مستو في حالته العامة يجب امرار مستو مساعد R من المستقيم المعني يقطع المستوي المحدد ونحدد خط تقاطعهما (2-1) ونوجد عليه نقطة K تقاطع المستقيم المعني مع خط التقاطع . هذه النقطة K تكون نقطة التقاطع المطلوبة (الشكل ١٨٠ ب) . ويفضل اعتياديا أن يكون المستوي المساعد مستويا اسقاطيا أماميا أو أفقيا ، (وأحيانا اسقاطيا جانبيا).

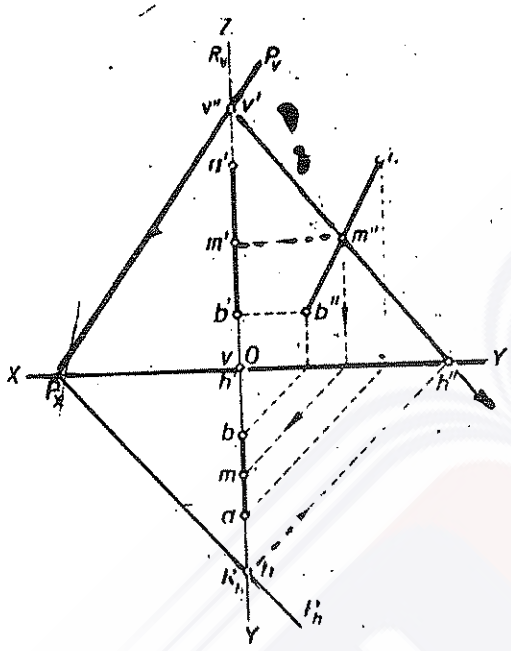
ب ـ لحل مثالنا هذا نمرر من المستقيم AB مستويا اسقاطيا أماميا R (الشكل (١٨١ آ) ، يتطابق أثره الأمامي R_V مع المسقط الأمامي a'b' للمستقيم AB . في مثالنا هذا (وفي أمثلة كثيرة أخرى) لاتكون هناك حاجة لرسم آثار المستوي المساعد جميعها ، فنكتفي بالرمز للأثر الأمامي R_V فقط .

العامة والمحدد بآثاره .

الحـــــل :

١ـ نرسم معطيات السؤال في التعبير الاسقاطي الثلاثي (الشكل ١٧٩) .

٢ـ المستقيم AB يقع في مستوي الاسقاط الجانبي W (هل تستطيع تعليل ذلك ؟) ولذلك فان نقطة تقاطعه مع المستوي P تقع أيضا في المستوي W وهذا يعني أنها تقع على الأثر الجانبي P_W للمستوي P وتتطابق مع مسقطها الجانبي "m الذي يمثل نقطة تقاطع الأثر الجانبي R_W مع المسقط الجانبي "a"b للمستقيم AB المتطابق مع المستقيم نفسه .



شكل رقم (١٧٩)

٣ـ نحدد ، حسب قواعد الاسقاط العامة ، المسقطين : الأفقي m والأمامي 'm لنقطة التقاطع M على المسقطين الأفقي ab والأمامي 'a'b للمستقيم AB على التوالي .

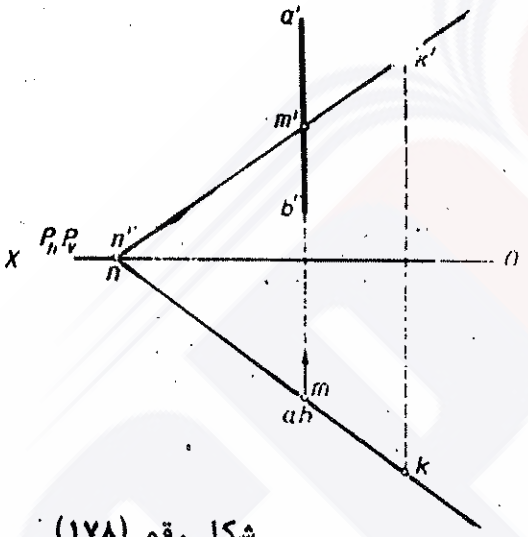
جـ ـ تقاطع مستقيم مع مستو محدد بغير آثاره :

١٦ـ حدد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي المحدد بالمثلث CDE (الشكل ١٨٠) .

١٤ـ حدد نقطة تقاطع المستقيم الاسقاطي الأفقي AB مع المستوي الاسقاطي الجانبي P الذي يمر من خط الأرض (الشكل ١٧٨) ٠

استخدم التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي للتوصل الى الحل ٠

الحـــل



شكل رقم (١٧٨)

آ ـ المسقط الأفقي m لنقطة التقاطع M يتطابق مع المسقط الأفقي ab للمستقيم AB ٠

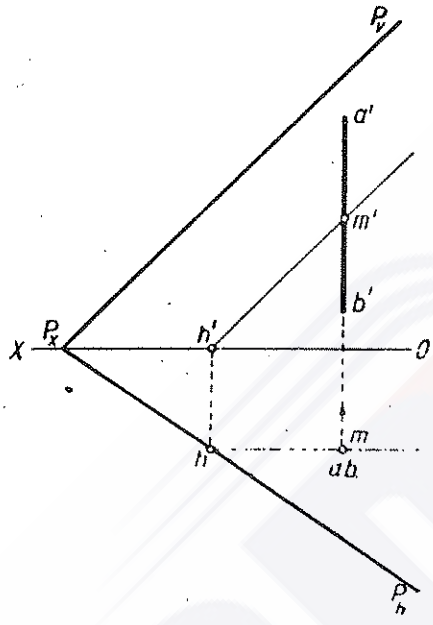
ب ـ لايجاد المسقط الأمامي 'm للنقطة المطلوبة نستخدم مستقيما مساعدا MN يمر من النقطة M والنقطة K('k,k) التي تنتمي للمستوي P ٠ لهذا الغرض نمرر من k و m مستقيما يقطع خط الأرض في النقطة n (وهي تمثل المسقط الأفقي للأثر الأفقي (N) للمستقيم MN والمتطابق مع الأثر نفسه) ٠ هذا المستقيم يمثل المسقط الأفقي kn للمستقيم المساعد ٠

جـ ـ نرسم المسقط الأمامي 'k'n لهذا المستقيم فنصل 'n الواقعة على خط الأرض (التي تمثل المسقط الأمامي للأثر الأمامي للمستقيم المساعد الذي يتطابق مع الأثر نفسه) والنقطة 'k فيقطع 'k'n المسقط الأمامي 'a'b للمستقيم AB في النقطة 'm المسقط الأمامي للنقطة المطلوبة M ٠

١٥ـ حدد نقطة تقاطع المستقيم الجانبي AB مع المستوي P في حالته

الحـــــل :

آ ـ بما أن المستقيم AB هو مستقيم اسقاطي أفقي فان المساقـــــط الأفقية لجميع نقاطه بما في ذلك نقطة تقاطعه مع المستـــوي P تتطابق مع أثره الأفقي ٠ لهـــذا يتطابق مسقطه الأفقـــــي ab ومسقط نقطة تقاطعه مـــــع المستوي الأفقي m مع أثـــره الأفقي ويتمركزون في نقطة واحدة٠



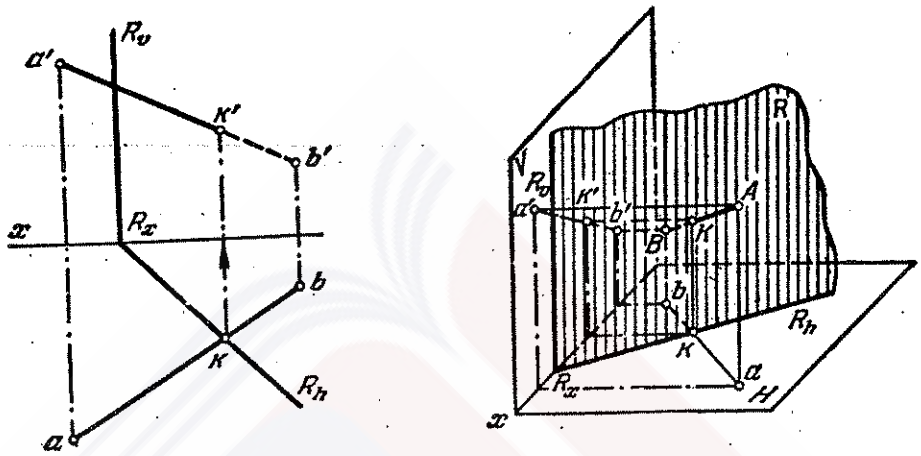
شكل رقم (١٧٧)

ب ـ تكون نقطة التقاطع M نقطـــــة مشتركة بين المستقيم والمستوي ولذلك فهي تنتمي للمستوي P وتقع على أحد مستقيماته ، وليكـــــن جبهة المستوي HM ٠ لهذا نمرر من النقطة m مستقيما يوازي خـــط الأرض ، فيكون هذا المستقيم المسقط الأفقي mh لجبهة المستوي H M فيقطع الأثر الأفقي P_h في نقطة h وهي المسقط الأفقي للأثر الأفـــقي (H) لجبهة المستوي المتطابق مع مسقطه هذا ٠

جـ ـ نحدد المسقط الأمامي h' للأثر الأفقي (H) لجبهة المستوي الذي يقـــع على خط الأرض ونرسم من h' مستقيما يوازي P_v فنحصل على المسقـــط الأمامي لجبهة المستوي ٠

د ـ المسقط الأمامي m' لنقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P يتحـــدد من تقاطع a'b' مع المسقط الأمامي h'm' لجبهة المستوي ٠

ولذلك فان مساقطها تقع على المساقط المماثلة للمستقيم .



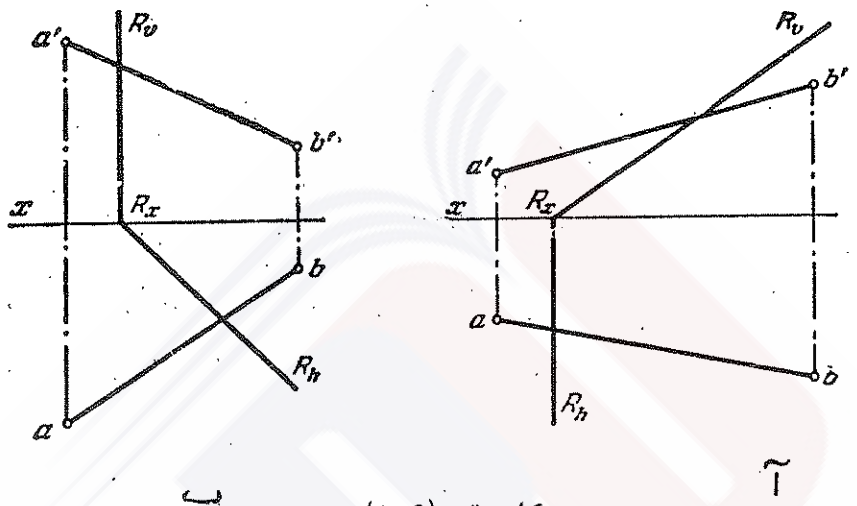
ب آ

شكل رقم (١٧٦)

لهذا تكون نقطة تقاطع الأثر الأمامي T_v والمسقط الأمامي a'b' المسقط الأمامي k' لنقطة تقاطع AB مع المستوي T ونحدد مسقطها الأفقي k على (الشكل ١٧٣ جـ) حسب قواعد الاسقاط العامة . وتمثل نقطة تقاطع الأثر الأمامي R_v والمسقط الأمامي a'b' (الشكل ١٧٥ ب) المسقط الأمامي k' لنقطة التقاطع المطلوبة ، وبالطريقة السابقة نفسها نحدد مسقطها الأفقي k . أما في مثالنا الثالث (الشكل ١٧٥ ب) فان تقاطع الأثر الأفقي R_h مع المسقط الأفقي ab يحدد المسقط الأفقي k لنقطة التقاطع ونحدد مسقطها الأمامي k' على a'b' حسب قواعد الاسقاط .

١٣ـ حدد نقطة تقاطع المستقيم الاسقاطي الأفقي AB مع المستوي P المحدد بأثريه P_v و P_h (الشكل ١٧٧) .

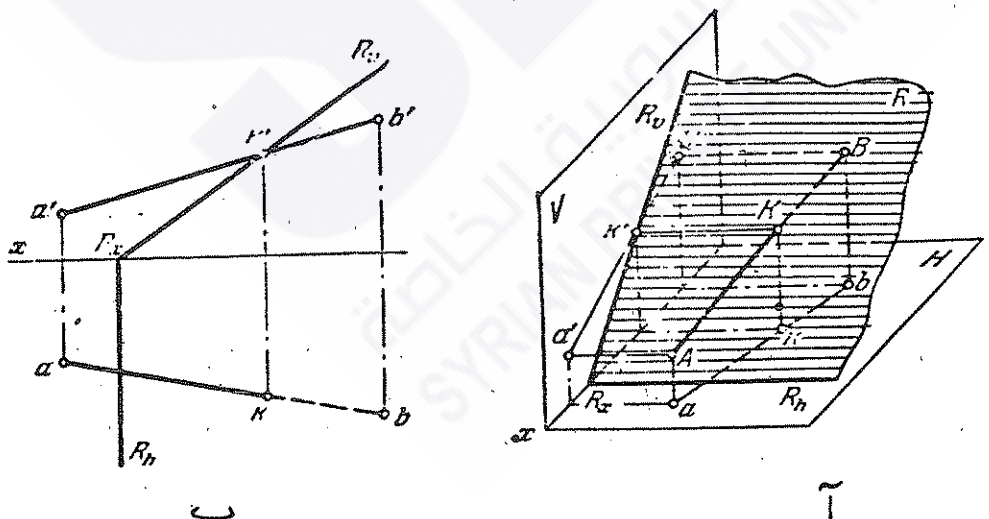
(١٧٤ ب) يتطابق المسقط الأفقي لهذه النقطة مع الأثر الأفـــقي R_h للمستوي .



ب آ

شكل رقم (١٧٤)

ج ـ من جهة أخرى ، نقطة التقاطع هذه هي احدى نقاط المستقيـــم AB .

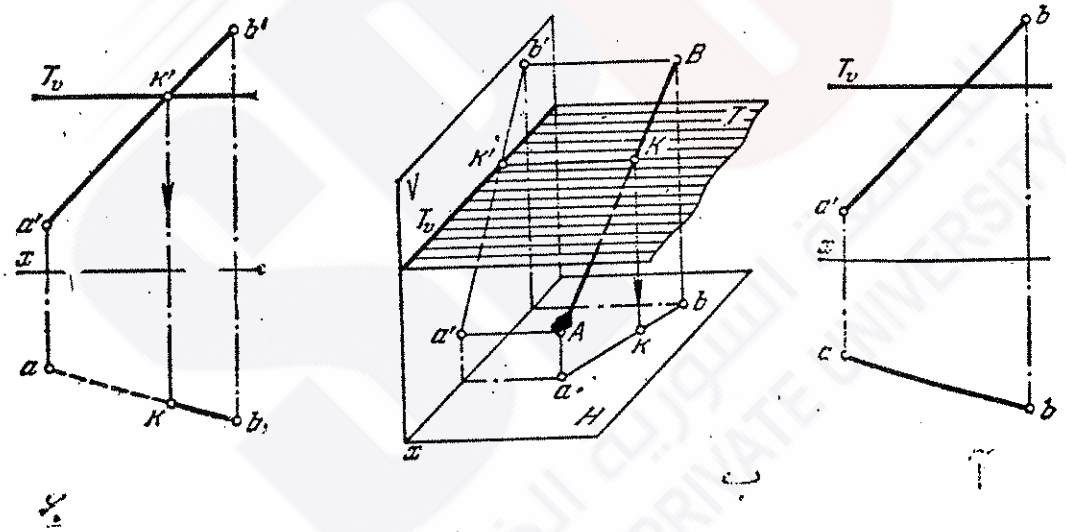


ب آ

شكل رقم (١٧٥)

مستو اسقاطي أمامي ، وأن المستوي R في الشكل (١٧٣ آ) هو مستو اسقاطي أمامي ، وفي الشكل (١٧٦ آ) هو مستو اسقاطي أفقي .

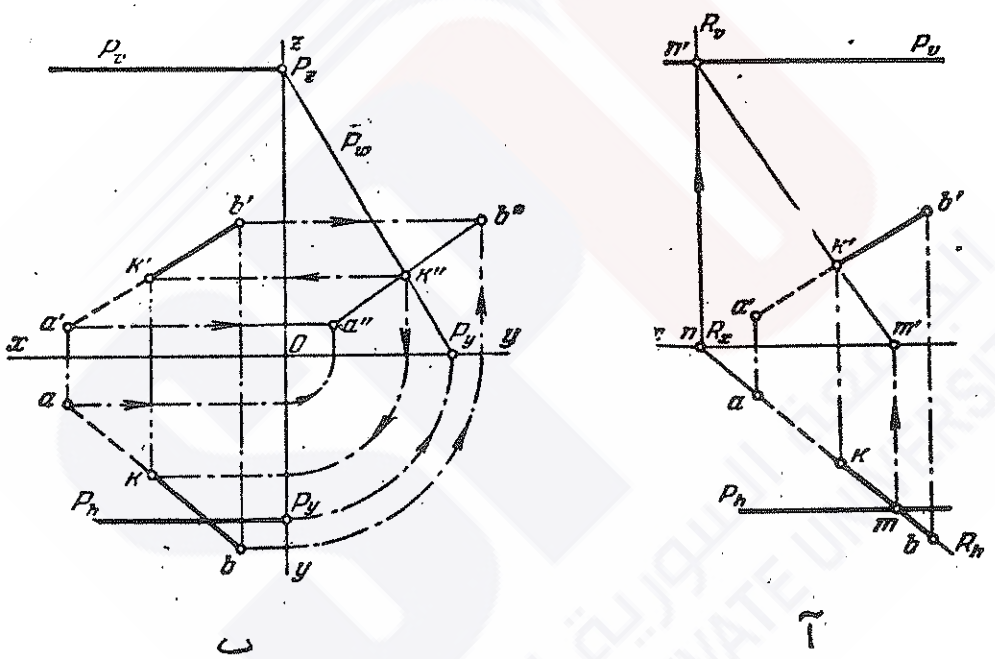
آ ـ اذا كان لدينا مستوي اسقاطي فان مساقط جميع العناصر الهندسية المنتمية له تتطابق مع أثره على مستوي الاسقاط المتعامد معه . لذلك المساقط الأمامية لجميع العناصر الهندسية المنتمية للمستوي T والمستوي R (الشكل ١٧٥ آ) تتطابق مع أثريهما الأماميين T_V و R_V . وتتطابق المساقط الأفقية للعناصر الهندسية المنتمية للمستوي R (الشكل ١٧٦ آ) مع أثره الأفقي R_h .



شكل رقم (١٧٣)

ب ـ نقطة تقاطع المستقيم AB مع كل من المستويات T و R تكون نقطة مشتركة بين المستقيم AB والمستوي المعني . لذلك فهي نقطة منتمية للمستوي المعني . على هذا الأساس ، المسقط الأمامي لهذه النقطة في المثال الأول يتطابق مع الأثر الأمامي T_V ، وفي المثال الثاني (الشكل ١٧٤ آ) مع الأثر الأمامي R_V ، وفي المثال الثالث

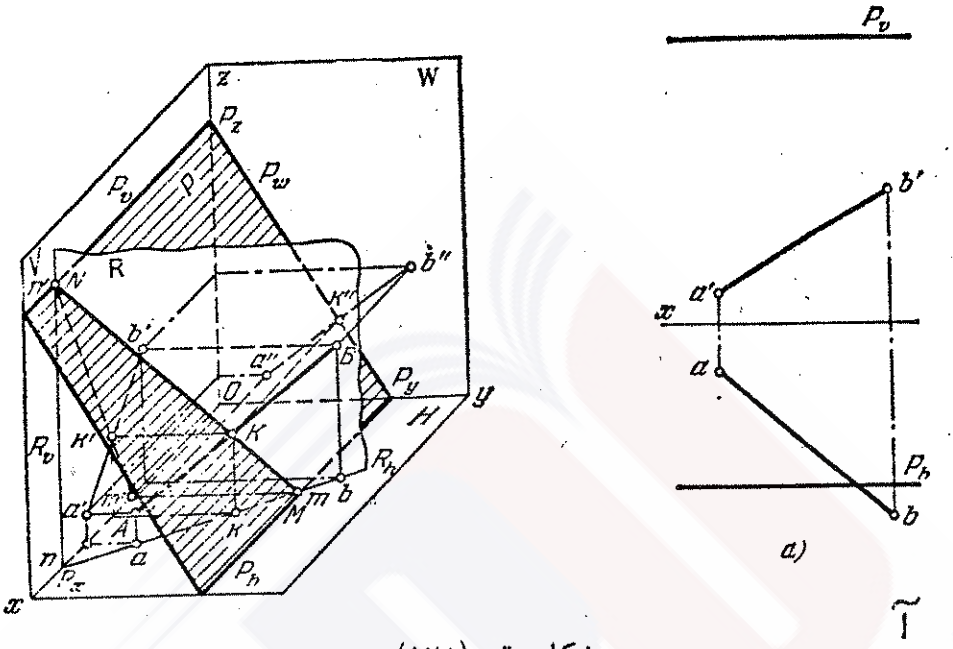
الهندسية الجانبية الواقعة فيه تتطابق مع أثره الجانبي ، ولهذا فان النقطة k''_1 تمثل النقطة الوحيدة المشتركة بين "a"b و P_w ، أي أنها نقطة تقاطعهما ، وبالتالي فالنقطة K هي نقطة تقاطع المستقيم AB والمستوي P . بعد ذلك وحسب قواعد الاسقاط ، كما هو موضح في الشكل (١٧٢ ب) ، نحدد المسقطين الأمامي 'k والأفقي k للنقطة المطلوبة K .



شكل رقم (١٧٢)

١٢ـ حدد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي T (الشكل ١٧٣ آ)،ومع المستوي R (الشكل (١٧٤ آ و ب) .

الحل : من الأشكال الفراغية (١٧٣ ب) و (١٧٥ آ) و (١٧٦ آ) نلاحظ أن المستوي T مستو يوازي مستوي الاسقاط الأفقي H ، فهو في الوقت نفسه



شكل رقم (١٧١)

آ ـ نمرر من المستقيم AB مستويا اسقاطيا أفقيا R (يتطابق أثره الأفقي R_h مع المسقط الأفقي ab للمستقيم) ، ونحدد خط تقاطع المستويين P و R بواسطة نقطتي تقاطع أثريهما المتماثلين M و N (الشكلان ١٧١ و ١٧٢) .

ب ـ نقطة التقاطع المطلوبة (k,k') نحددها من تقاطع المستقيمين AB و MN (الشكلين ١٦٩ ب و ١٧٠ آ) وفق قواعد الاسقاط العامة .

ج ـ بما أن المستوي P هو مستو اسقاطي جانبي فان تحديد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P يمكن التوصل اليه باستخدام التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي (الشكل ١٧٢ ب) ، فنلاحظ أن الأثر الجانبي للمستوي P_w يتقاطع مع "a"b في النقطة "k . وبما أن المستوي P هو مستو اسقاطي جانبي فإن مساقط جميع العناصر

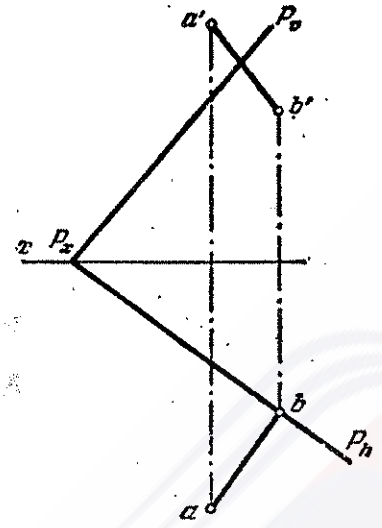
المقطع AK من المستقيم AB واقع أمام المستوي P ، ولذلك يكون مرئيا ٠ لكن في الحالات العامة الأكثر تعقيدا وعند استخدام التعبير الاسقاطي المستوي فقط يكون من الصعب التحديد المباشر للأجزاء المرئية والمخفية من العناصر الهندسية ٠ لذلك لابد ، في مثل هذه الحالات ، من تحليل أوضاع بعض نقاط هذه العناصر ٠ فمثلا لنأخذ النقطة (1) على المستقيم AB والنقطة N على الأثر الأمامي P_v فنجد أن مسقطيهما الأماميان '1 و 'n يتطابقان ٠ لكن المسقط الأفقي 1 (عند النظر باتجاه السهم S ـ الشكل ١٧٠ ب) يكون أبعد من المسقط الأفقي n عن خط الأرض (n تقع على خط الأرض أساسا) ، وهذا يعني أن النقطة (1) أبعد من النقطة N عن مستوي الاسقاط الأمامي V ، ولذلك فان مقطع المستقيم AB من النقطة A وحتى النقطة K (نقطة اختراقه للمستوي P) يكون مرئيا في الاسقاط الأمامي ، أي أن مسقطه الأمامي 'a'k يكون مرئيا ، والجزء 'k'b يكون مخفيا ، ولذلك يرسم بخط متقطع ٠ وبالطريقة نفسها نحدد الأجزاء المرئية وغير المرئية (المخفية) من المستقيم AB في الاسقاط الأفقي فراغيا وفي التعبير الاسقاطي المستوي ٠

١١ـ حدد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي P المحدد بأثريه P_v و P_h (الشكل ١٧١ آ) ٠

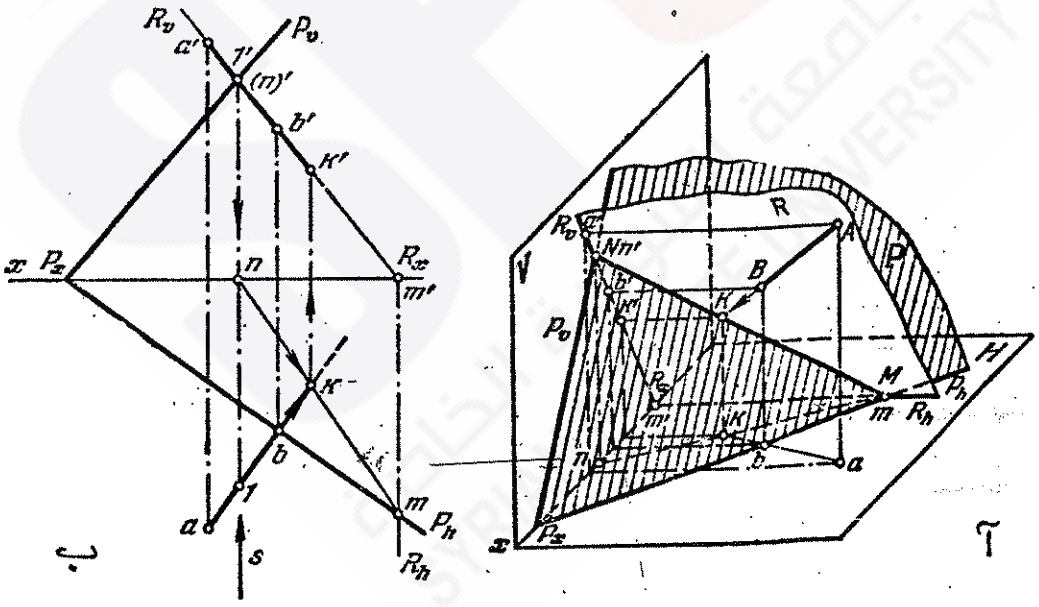
الحل : من التعبير الاسقاطي المستوي في الشكل (١٧١ آ) ، ومن التعبير الفراغي لوضعيتي المستوي P والمستقيم AB في الشكل (١٧١ ب) نلاحظ أن المستوي P مستو اسقاطي جانبي يوازي خط الأرض ، وأن المستقيم AB في في حالته العامة ٠

بخط تقاطع MN ، كما هو واضح في الشكل (١٧٠ آ) ونحدد مساقط هذا المستقيم في التعبير الاسقاطي الثنائي (الشكل ١٧٠ ب) بالطريقة ذاتها التي استخدمناها في المثال(١) من الفقرة (آ) من هذا الفصل .

ب ـ نقطة K تقاطع المستقيم AB مع المستوي P تحدد من تقاطع المستقيمين AB و MN (الشكل ١٧٠ آ و ب) .



الشكل (١٦٩)



شكل رقم (١٧٠)

جـ ـ في مثالنا هذا ومن الشكل الفراغي (الشكل ١٧٠ آ) واضح لدينا أن

للمستوي P ولكنها تقع خارج المستوي Q (كيف يمكن التحقق من عدم وقوعها في المستوي Q ؟) . نمرر من النقطة A مستويا مساعدا R يوازي مستوي الاسقاط الأمامي V فيكون له أثر أفقي R_h فقط يوازي خط الأرض ويمر من النقطة a (كيف تعلل ذلك ؟) . هذا المستوي يقطع المستوي Q بمستقيم أمامي يمر من النقطة (h,h') التي نحصل عليها من تقاطع R_h و Q_h ويقطع المستوي P بمستقيم جانبي يمر من النقطة A(a,a') وذلك حسب الاستنتاجات التي توصلنا اليها سابقا .

هـ ـ المسقطان الأماميان لخطي تقاطع المستوي R مع المستويين P و Q يتقاطعان في النقطة k' المسقط الأمامي للنقطة المشتركة بين المستويات الثلاثة ، وبالتالي فهي المسقط الأمامي للنقطة المشتركة الثانية بين المستويين P و Q . نحدد مسقطها الأفقي k على الأثر الأفقي R_h للمستوي R (هل تستطيع تعليل ذلك ؟) .

و ـ نصل k' و h' فنحصل على المسقط الأمامي k'h' ونصل k و h فنحصل على المسقط الأفقي لخط التقاطع ، وهو المطلوب .

ب ـ **تقاطع مستقيم مع مستو محدد بآثاره :**

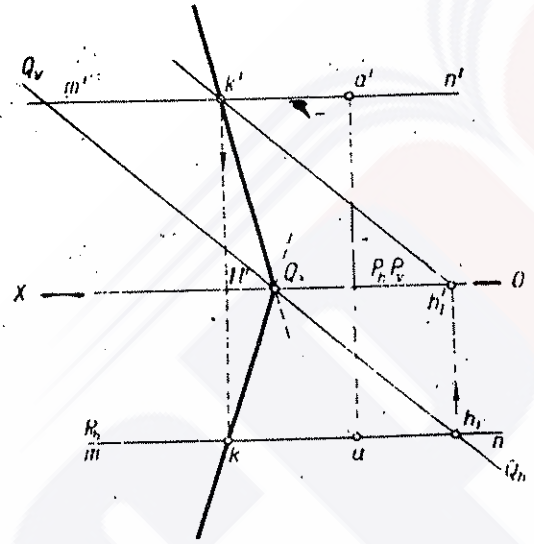
١٠ـ حدد نقطة تقاطع (اختراق) المستقيم AB مع المستوي P المحدد بأثريه P_v و P_h وحدد موقعه الفراغي بالنسبة لمستويات الاسقاط (الشكل ١٦٩).

الحل :

آ ـ نمرر من المستقيم AB مستويا اسقاطيا أماميا R ينطبق أثره الأمامي R_v مع المسقط الأمامي a'b' للمستقيم AB فيتقاطع R مع المستوي P

ز ـ نحدد المسقط الأمامي k' لهذه النقطة ويقع على الأثر الأمامي R_v . بعد ذلك نصل h و k فنحصل على المسقط الأفقي kh ونصل h' و k' فنحصل على المسقط الأمامي k'h' لخط تقاطع المستويين P و Q . وهو المطلوب .

٩ـ ارسم خط تقاطع المستويين P و Q المحددين بآثارهما في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي (الشكل ١٦٨) .



شكل رقم (١٦٨)

الحـــل :

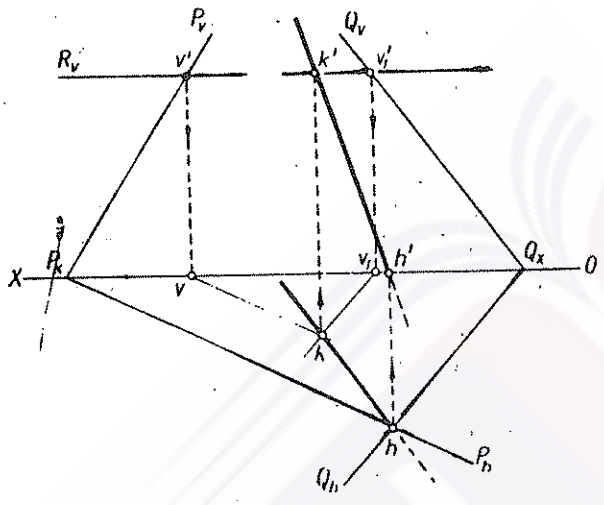
آ ـ المستوي P اسقاطي جانبي يمر من خط الأرض ، ولهذا يتطابق أثراه الأمامي P_v والأفقي P_h مع خط الأرض .

ب ـ المستوي Q في حالته العامة ، ويقع أثراه Q_h و Q_v على استقامة واحدة .

جـ ـ احدى نقاط خط التقاطع تكون نقطة تقاطع الآثار المتماثلة التي تتطابق مع النقطة Q_x (في هذا المثال جميع الآثار تتقاطع في نقطة واحدة تتطابق مع Q_x) .

د ـ لإيجاد النقطة المشتركة الثانية نفترض ان النقطة A(a,a') تنتمي

ب ـ نحدد نقطة تقاطع الأثرين الأفقيين P_h و Q_h فنحصل على احدى نقاط خط التقاطع $\overline{H(h,h')}$.



شكل رقم (١٦٧)

ج ـ نستخدم مستويا مساعدا R يوازي مستوي الاسقاط الأفقي H ويقطع المستويين P و Q ويكون له أثر أمامي P_v فقط .

د ـ نحدد نقطتي تقاطع R_v مع P_v و Q_v وهما (v,v') و (v_1,v_1')

هـ ـ حسب الاستنتاج الذي توصلنا اليه في المثال (٣) ، خط تقاطع المستوي R مع كل من P و Q يكون مستقيما أفقيا مسقطه الأمامي ينطبق على R_v . المسقط الأفقي لخط تقاطع R مع P يمر من v والمسقط الأفقي لخط تقاطع R و Q يمر من v_1 والأول يوازي P_h والثاني يوازي Q_h .

و ـ نقطة تقاطع المسقطين الأفقيين لخطي تقاطع R مع كل من P و Q تحدد المسقط الأفقي k لنقطة مشتركة بين المستويات الثلاثة R و P و Q ولذلك فهي تمثل المسقط الأفقي لنقطة مشتركة بين P و Q ، أي أنها المسقط الأفقي لاحدى نقاط خط تقاطعهما .

P_v و Q_v والأثرين الأفقيين P_h و Q_h يتوازيان فيما بينهما ، وجميعها توازي خط الأرض . لهذا لابدّ من استخدام مستو مساعد لتحديد هذه النقطة .

ب ـ لهذا الغرض نأخذ مستويا اسقاطيا أفقيا مساعدا S يقطع المستويين P و Q (الشكل ١٦٥ ب) ، ونعبر عنه اسقاطيا بأثريه S_v و S_h (الشكل ١٦٦ ب) . ونحدد خط تقاطعه (12,1'2')12 مع المستوي P وخط تقاطعه (34,3'4')34 مع المستوي Q ، وفق قواعد الاسقاط العامة . هذا المستقيمان يتقاطعان في النقطة M(m,m') فتكون هذه النقطة مشتركة بين المستويات الثلاثة S و P و Q وبالتالي فهي احدى النقاط المشتركة بين المستويين P و Q ، أي أنها احدى نقاط خط تقاطعهما .

جـ ـ من m' نرسم مستقيما يوازي خط الأرض (يوازي في الوقت نفسه P_v و Q_v) فنحصل على m'n' المسقط الأمامي لخط تقاطع P و Q ونمرر من m مستقيما يوازي خط الأرض (يوازي في الوقت نفسه P_h و Q_h) فنحصل على mn المسقط الأفقي لخط تقاطع P و Q .

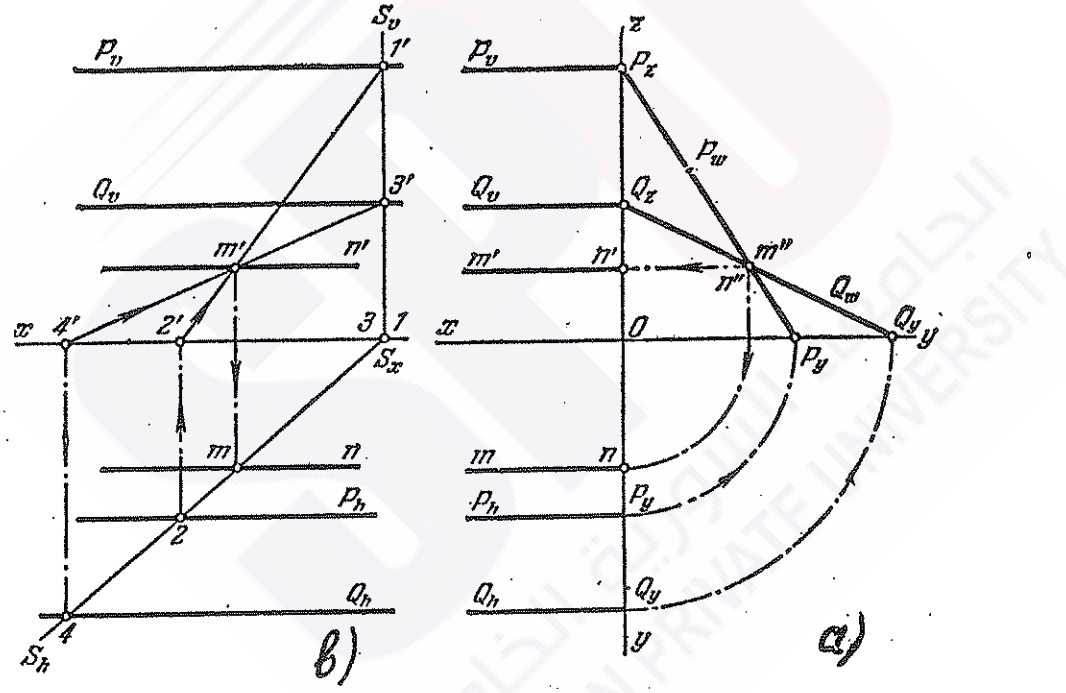
٨ـ ارسم خط تقاطع المستويين P و Q في حالتهما العامة المحددين بآثارهما في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي (الشكل ١٦٧) .

الحل :

آ ـ نلاحظ من الشكل أن الأثرين الأماميين P_v و Q_v يتقاطعان في موقع بعيد جدا عن خط الأرض أو خارج حدود ورقة الرسم . لذلك يتعذر تحديد نقطة تقاطع هذين الأثرين في حدود ورقة الرسم .

جانبيا)) . لهذا يكفي معرفة احدى نقاطه لتحديده .

ب ـ في حالة التعبير الاسقاطي الثلاثي يمكننا الحصول على هذه النقطة مباشرة من تقاطع الأثرين الجانبيين . وهذه النقطة تمثل المسقط الجانبي لخط التقاطع "m"n المتمركز في نقطة أثره (W) . من هذه النقطة نرسم ، وفق قواعد الاسقاط والحالات الخاصة لأوضاع المستقيم ، المسقطين الأمامي m'n' والأفقي mn لخط التقاطع (الشكل ١٦٦ آ)



شكل رقم (١٦٦)

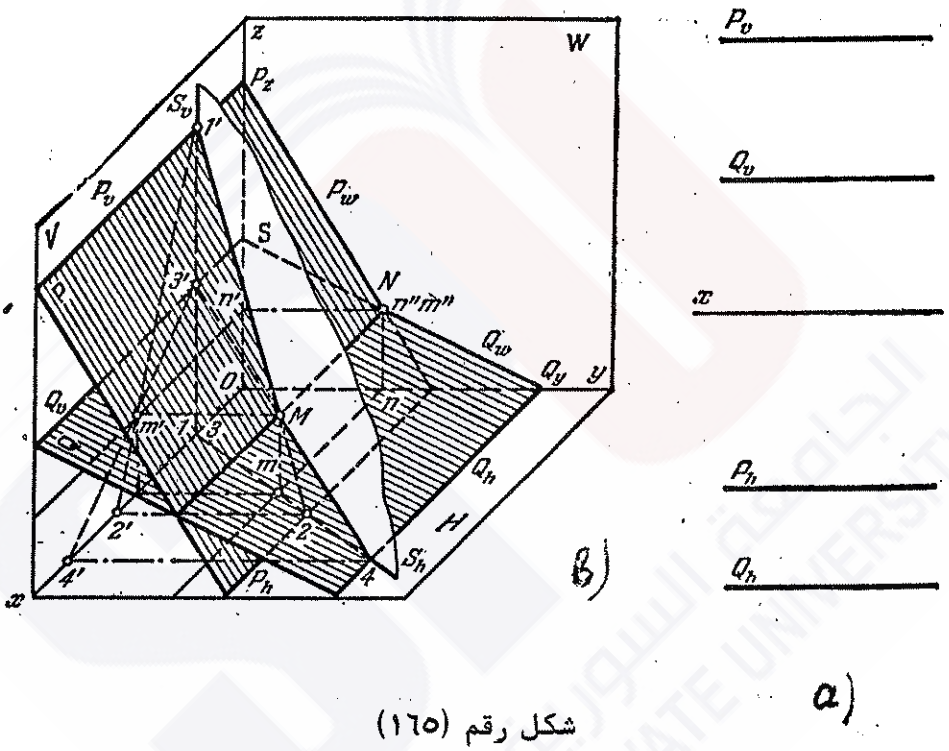
الحـــل : (٢)

آ ـ أما في حالة التعبير الاسقاطي الثنائي فلا يمكننا ، كما هو واضح من الشكل (١٦٥ آ) ، الحصول على هذه النقطة مباشرة لأن الأثرين الأماميين

٥ـ ارسم خط تقاطع المستويين الاسقاطيين الجانبيين P و Q المحددين بآثارهما (الشكل ١٦٥) مستخدما :

آ ـ التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي ٠

ب ـ التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي ٠

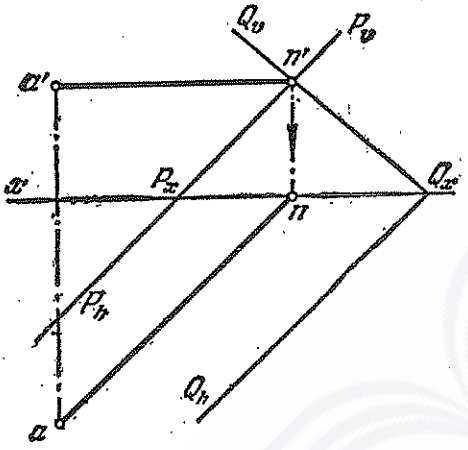


شكل رقم (١٦٥)

الحـــل :

آ ـ نلاحظ من المخطط الفراغي لوضعية المستويين المتقاطعين أنهما يوازيان خط الأرض (الشكل ١٦٥) ، وبذلك تنطبق حالة هذا المثال على الحالات المذكورة في الأمثلة السابقة ، وينطبق على وضعية المستويين الأستنتاج الذي توصلنا اليه في تلك الأمثلة والذي ينص على أن : ((خط تقاطع مستويين اسقاطيين جانبيين يكون مستقيما اسقاطيا

الأرض فنحصل على n'a' المسقط الأمامي لخط تقاطع المستويين (الشكل ١٦٣) ٠



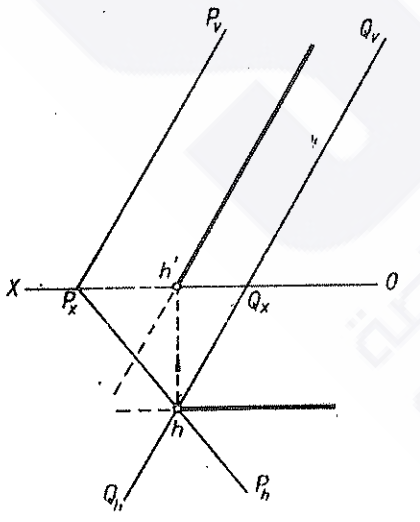
شكل رقم (١٦٣)

د ــ نحدد حسب قواعد الاسقاط العامة المسقط الأفقي n للأثر الأمامي لخط التقاطع الذي يقع على خط الأرض ٠

و ــ من n نرسم مستقيما يوازي أثري المستويين P_h و Q_h ونحدد عليه المسقط الأفقي a لنحصل على المسقط الأفقي na لخط تقاطع المستويين P و Q ٠ وهو المطلوب ٠

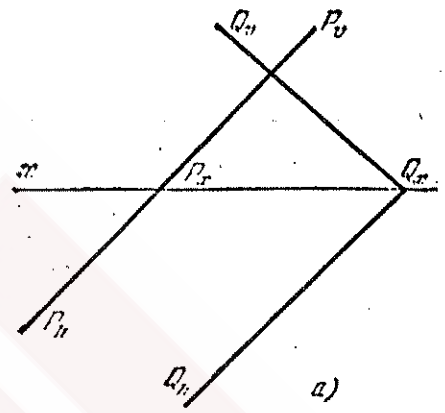
ان هذه النتيجة توصلنا الى الاستنتاج التالي : ((اذا توازى الأثران الأفقيان لمستويين متقاطعين في حالتهما العامة فان خط تقاطعهما يكون مستقيما أفقيا)) ٠

نصل الى استنتاج مشابه عندما تكون الآثار الأمامية للمستويات المتقاطعة متوازية ٠ في هذه الحالة خط التقاطع يكون مستقيما أماميا (الشكل ١٦٤) ٠ لذلك في مثل هذه الحالات لاحاجة لاستخدام مستويات مساعدة وانما تكفي نقطة تقاطع الأثرين المتماثلين الآخرين للمستويين لرسم خط تقاطعهما ٠

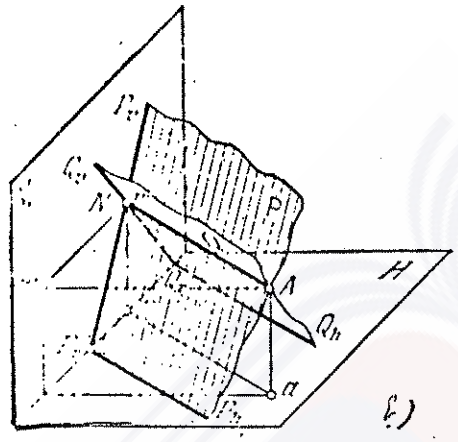


شكل رقم (١٦٤)

الاسقاطي المستوي الثنائي (الشكل ١٦١) .



شكل رقم (١٦١)



شكل رقم (١٦٢)

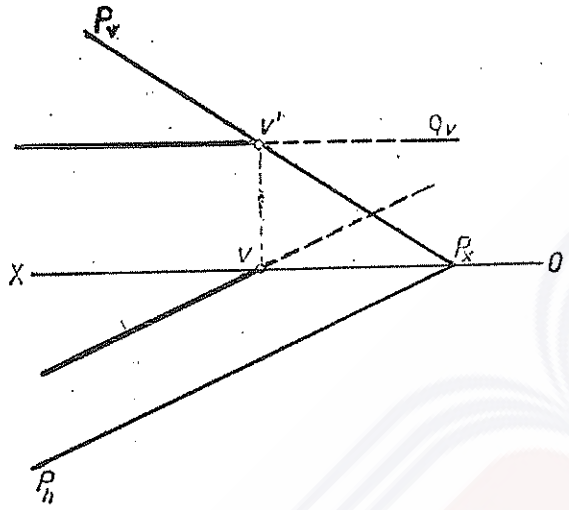
الحـــــل :

آ ـ نلاحظ من الشكل (١٦١) أن المستويين في حالتهما العامة . ولكـــن أثريهما الأفقيين متوازيان .

ب ـ من الشكل (١٦٢) نجد أن نقطة N تقاطع الأثرين الأماميين P_V و Q_V تحدد احدى نقاط خط تقاطع المستويين ، ومن هذا الشكل نلاحظ أيضـا أن المستويين لايمكن أن يتقاطعا في مستوي الاسقاط الأفقي H وهـــذا يعني عدم وجود أي نقطة مشتركة للمستويين في هذا المستوي . أي أن : خط تقاطع المستويين لايتقاطع مع مستوي الاسقاط الأفقي H ولذلك فهو يوازيه ويكون مستقيما أفقيا .

جـ ـ على هذا الأساس ، نحدد في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي نقطة n' تقاطع الأثرين الأماميين P_V و Q_V ونمرر منها مستقيما يوازي خـــط

الحـــل :



شكل رقم (١٦٠)

آ ـ نلاحظ من الشكل أن المستوي P في حالته العامـــة والمستوي Q يوازي المستوي H ، ولهذا يوجد له فقـــط أثر أمامي Q_v .

ب ـ يمثل خط تقاطع المستويين مستقيما أفقيا (هل تستطيع تعليل ذلك ؟) يمر مـــن نقطة أثره الأمامي (v_1v') وهي نقطة تقاطع الأثرين الأماميين Q_v و P_v .

جـ ـ نمرر من v' مستقيما يوازي خط الأرض (يتطابق مع Q_v) فنحصل على المسقط الأمامي لخط التقاطع (هل تستطيع تعليل التطابق ؟)

د ـ نقيم من v' خط تداع يعامد خط الأرض فنحصل على هذا الأخير علـــى نقطة v المسقط الأفقي للأثـر الأمامي لخط التقاطع .

هـ ـ من v نرسم مستقيما يوازي P_h فنحصل على المسقط الأفقي لخـــط التقاطع .

و ـ خط التقاطع يمر من الربع الأول والثاني لتقسيمات الفراغ بالنسبـــة لمستويات الاسقاط (هل تستطيع تعليل ذلك ؟

* **استنتاج مهم** : خط تقاطع مستو في حالته العامة مع مستو يوازي المستوي H يكون مستقيما أفقيا .

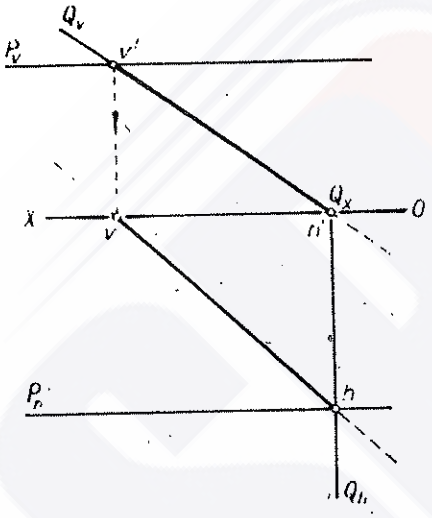
٤ـ حدد خط تقاطع المستويين P و Q المحددين بآثارهما في التعبيـــر

و ـ نصل 'm و 'n فنحصل على 'm'n المسقط الأمامي لخط التقاطع المطلوب .

٢ـ حدد خط تقاطع المستويين P و Q المحددين بآثارهما في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي (الشكل ١٥٩) .

الحـــل :

آ ـ من الشكل نلاحظ أن المستوي Q مستو اسقاطي أمامي المستوي P مستو يوازي خط الأرض ، أي أنه مستو اسقاطي جانبي .



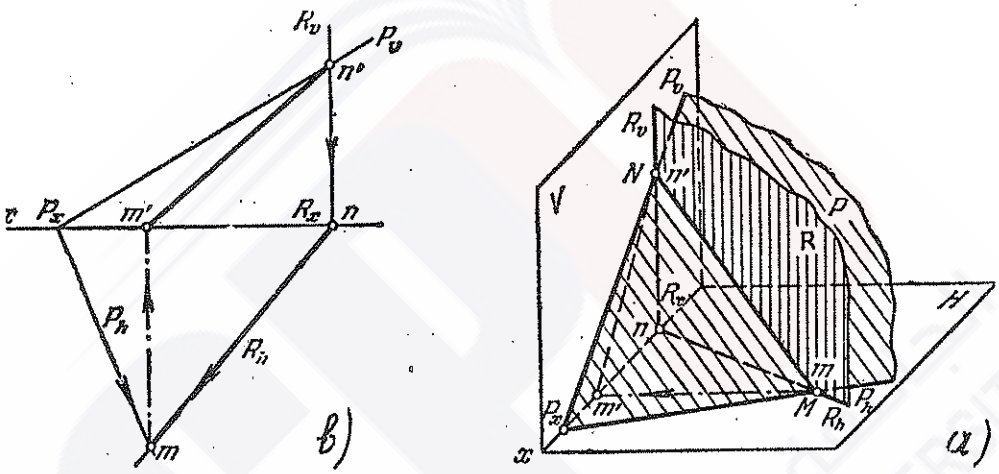
شكل رقم (١٥٩)

ب ـ خط تقاطع المستويين يتحدد بنقطتي أثريه (v_1v') و (h_1h') وهما نقطتي تقاطع الأثرين الأماميين Q_v و P_v والأثرين الأفقيين Q_h و P_h للمستويين . لهذا نصل بين 'v و 'h وبين v و h فنحصل على المسقطين الأمامي 'h'v والأفقي hv لخط التقاطع .

جـ ـ خط التقاطع HV يمر من الربع الثالث والأول والرابع من تقسيمات الفراغ بالنسبة لمستويات الاسقاط (هل تستطيع تعليل ذلك ؟)

٣ـ حدد خط تقاطع المستويين P و Q المحددين بآثارهما في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي (الشكل ١٦٠) .

المتماثلة لمستويين تحدد لنا نقاط مشتركة بين المستويين ، أي أنها تحدد بعض نقاط خط تقاطعهما • ولذلك يمكننا استخدام نقطة N تقاطع الأثرين P_v و R_v ونقطة M تقاطع الأثرين الأفقيين P_h و R_h لتحديد خط تقاطع المستويين P و R الذي يمر من هاتين النقطتين (الشكل ١٥٨) •



شكل رقم (١٥٨)

د ـ لتحديد ذلك في التعبير الاسقاطي المستوي نلاحظ من الشكل (١٥٧) أن المستوي R مستو اسقاطي أفقي ، ولذلك يتطابق المسقط الأفقي لخط التقاطع mn مع الأثر الأفقي R_h (هل تستطيع تعليل ذلك ؟)

هـ ـ من تقاطع P_v و R_v (الشكل ١٥٨ب) نحصل على 'n المسقط الأمامي للنقطة N • مسقطها الأفقي n يقع على خط الأرض ويتطابق مع R_x • من تقاطع R_h و P_h نحصل على m المسقط الأفقي للنقطة M • مسقطها الأمامي 'm يقع على خط الأرض وينتج من تقاطع خط التداعي المقام من m عموديا على خط الأرض مع هذا الأخير •

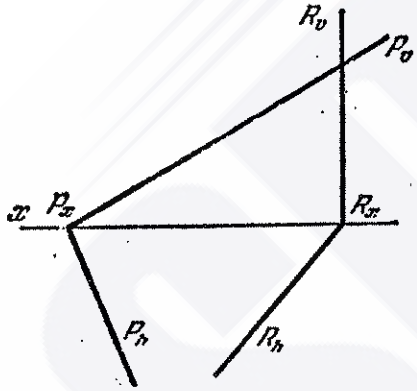
الفصل الخامس

العلاقة بين المستويات وبين مستو ومستقيم خارج عنه

أولا ـ أمثلة تطبيقية :

آ ـ تقاطع المستويات المحددة بآثارها :

١ـ حدد خط تقاطع المستويين P و R المحددين بآثارهما في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي (الشكل ١٥٧) .



شكل رقم (١٥٧)

الحل :

آ ـ من الفصل الثاني نعلم أن تحديد مستقيم ما يتطلب معرفة نقطتين من نقاطه على الأقل . لهذا يمكننا تحديد خط تقاطع المستويين P و R اذا عرفنا نقطتين من نقاطه، أي اذا عرفنا نقطتين مشتركتين بين المستويين .

ب ـ هاتان النقطتان يمكن أن تكونا نقطتي تقاطع مستقيمات منتمية لأحدهما مع مستقيمات منتمية للمستوي الآخر .

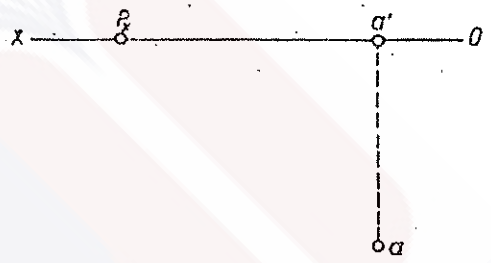
جـ ـ آثار المستوي مستقيمات منتمية للمستوي المعني ، ولذلك تقاطع الآثار

١٧ـ ارسم أثري المستوي P المار من النقطة A اذا علم موقع نقطة التقاء الأثرين P_x واذا كان المستوي :

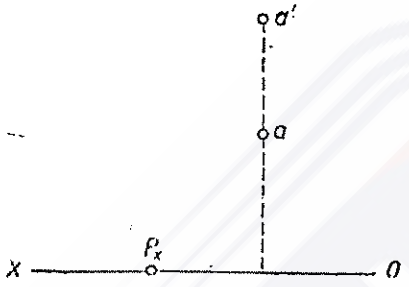
آ ـ في حالته العامة (الأشكال ١٥٢ ـ ١٥٤) .

ب ـ اسقاطيا أفقيا (الشكل ١٥٥) .

جـ ـ اسقاطيا أماميا (الشكل ١٥٦) .

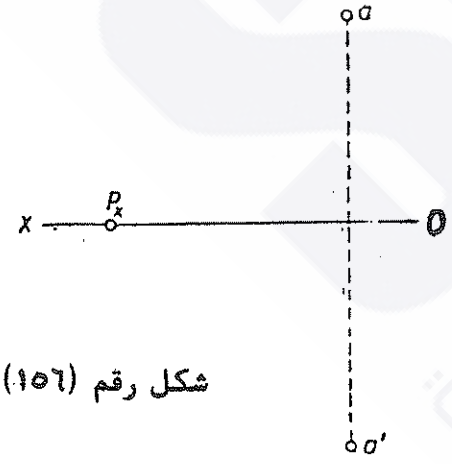


شكل رقم (١٥٣)



شكل رقم (١٥٤)

شكل رقم (١٥٥)



شكل رقم (١٥٦)

١٦ـ ارسم أثري المستوي P المار من المستقيم AB اذا كان المستوي !

آ ـ اسقاطيا أفقيا (الشكل ١٤٧) .

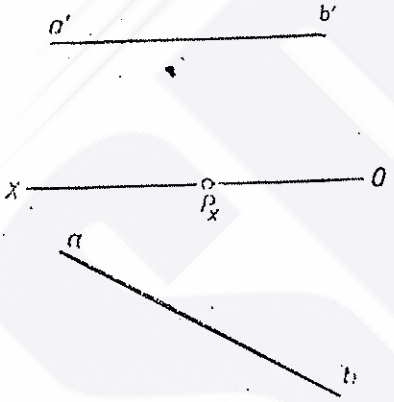
ب ـ اسقاطيا أماميا (الشكل ١٤٨) .

جـ ـ في حالته العامة (الشكلان ١٤٩ و ١٥٠) .

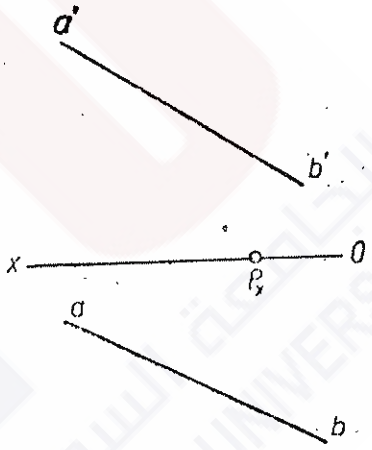
١٧ـ ارسم آثار المستوي الاسقاطي الجانبي المار من المستقيم AB (الشكل ١٥١):

آ ـ في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي .

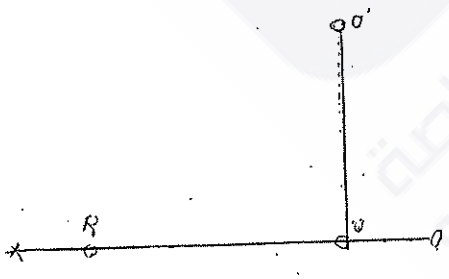
ب ـ في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي .



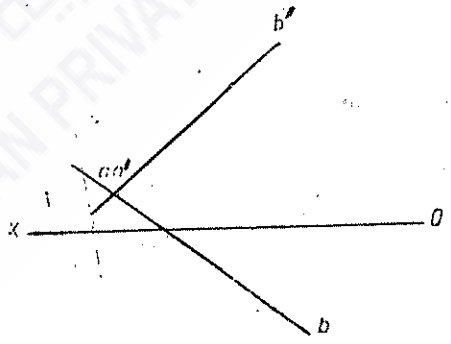
شكل رقم (١٥٠)



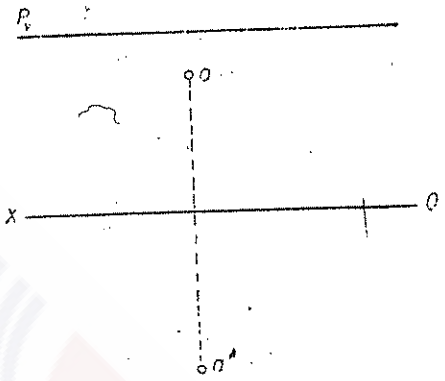
شكل رقم (١٤٩)



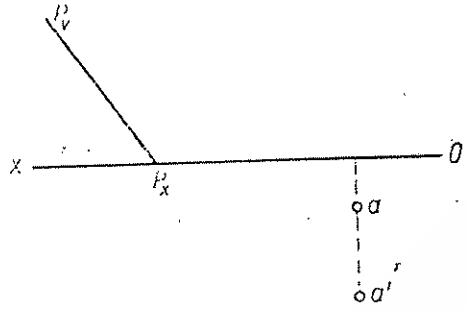
شكل رقم (١٥٢)



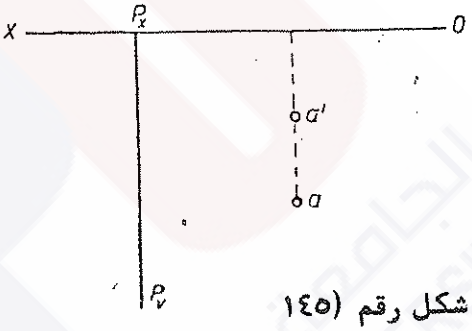
شكل رقم (١٥١)



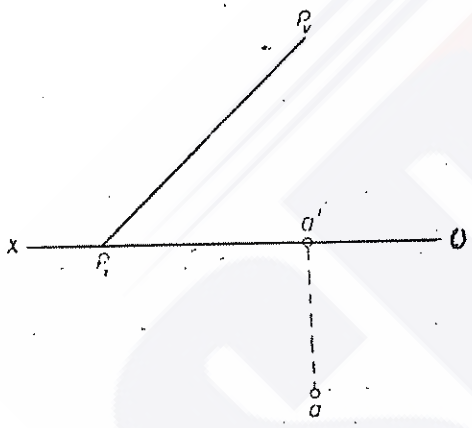
شكل رقم (١٤٣)



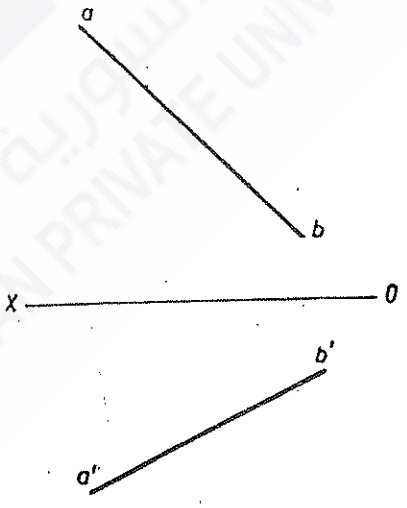
شكل رقم (١٤٤)



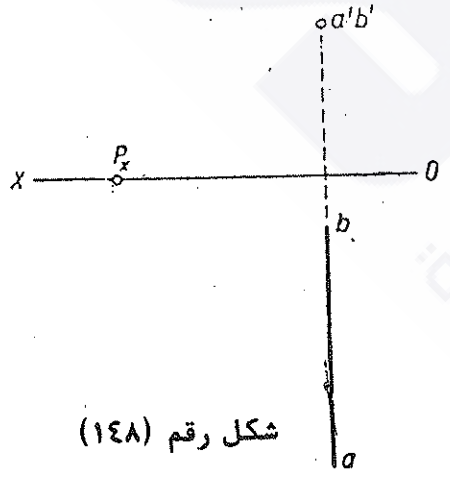
شكل رقم (١٤٥)



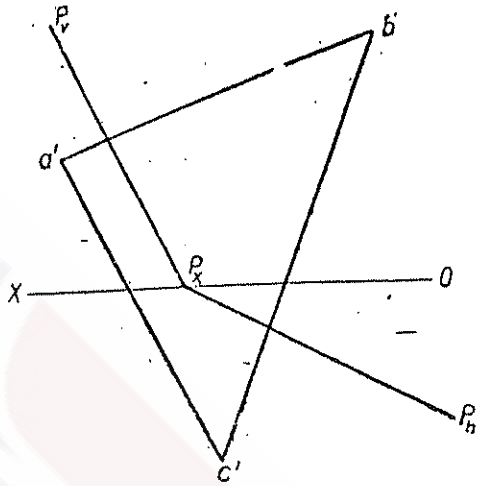
شكل رقم (١٤٦)



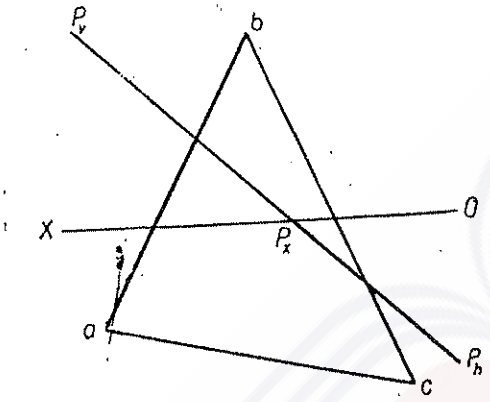
شكل رقم (١٤٧)



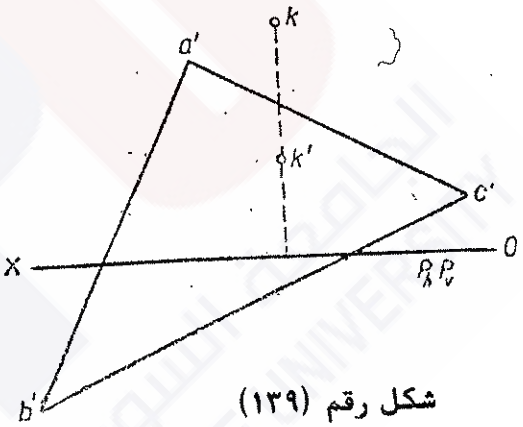
شكل رقم (١٤٨)



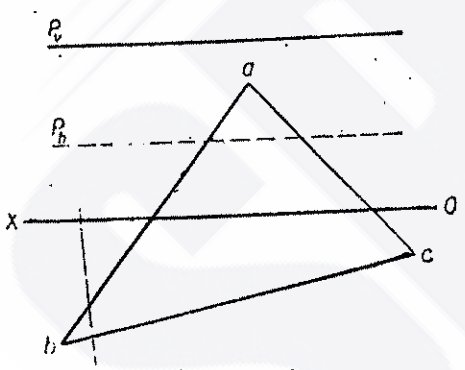
شكل رقم (١٣٧)



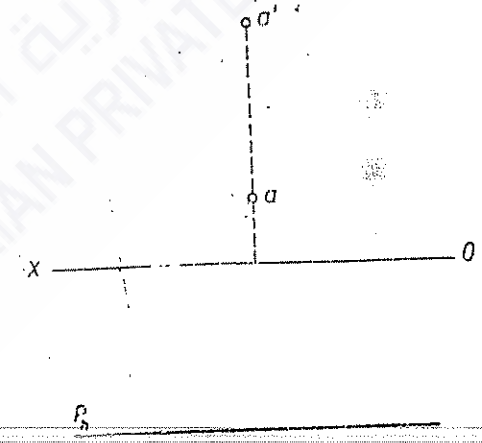
شكل رقم (١٣٨)



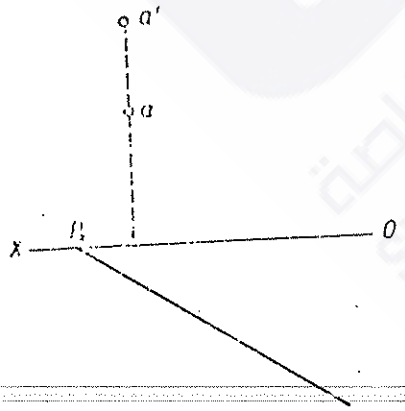
شكل رقم (١٣٩)



شكل رقم (١٤٠)

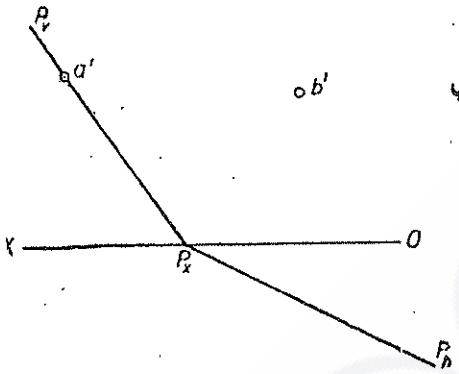


شكل رقم (١٤١)

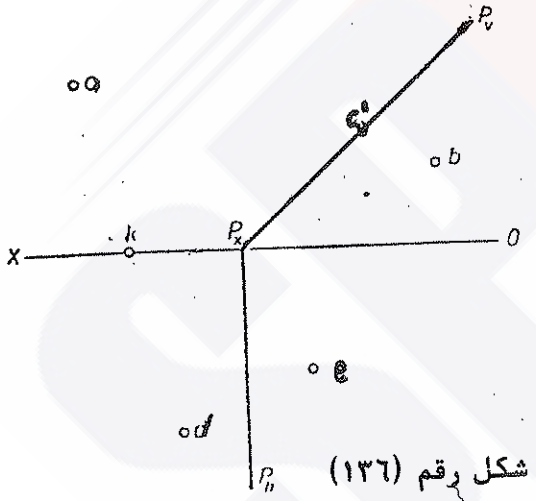


شكل رقم (١٤٢)

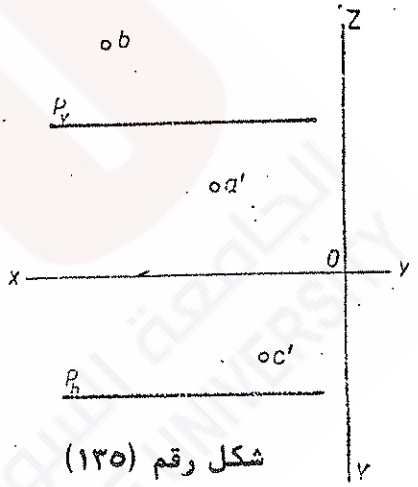
١٢ـ استكمل مساقط المثلث ABC الواقع في المستوي P في التعبير الاسقاطي الثنائي المستوي دون الاستعانة بمستقيمات الميل الأعظم (الشكلان ١٣٧ و ١٣٨) . يمكن الاستعانة بمستقيمات افق وجبهة المستوي للتوصل للحل المطلوب .



شكل رقم (١٣٤)



شكل رقم (١٣٦)



شكل رقم (١٣٥)

١٣ـ استكمل في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي مساقط المثلث A B C الواقع في المستوي الاسقاطي الجانبي P (الشكلان ١٣٩ و ١٤٠) .

١٤ـ استكمل في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي مساقط المثلث A B C الواقع في المستوي الاسقاطي الجانبي P (الشكلان ١٣٩ و ١٤٠) .

١٥ـ حدد الأثر الثاني للمستوى P مستعينا بالنقطة A المنتمية لهذا المستوي (الأشكال ١٤١ ـ ١٤٦) .

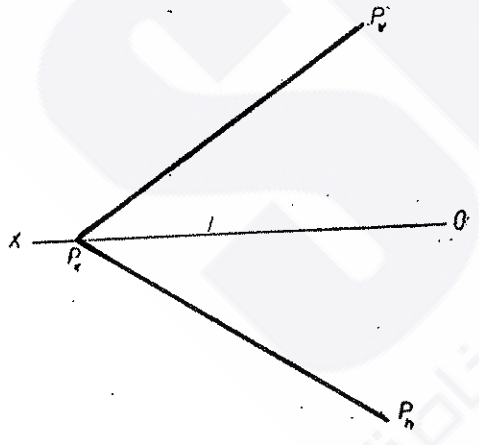
٩ـ حدد المحل الهندسي للنقاط الواقعة في المستوي P (الشكل ١٣٣) والتي تبعد مسافة (٢٠) ملم عن :

آ ـ مستوي الاسقاط الأفقي .

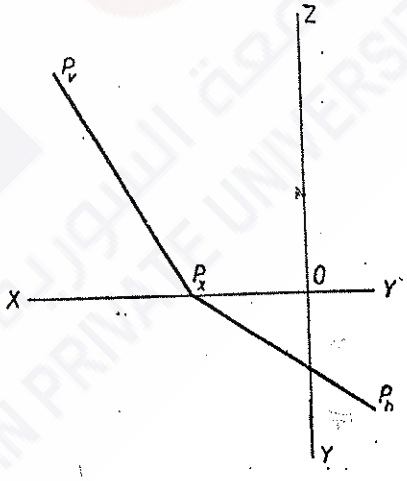
ب ـ مستوي الاسقاط الأمامي .

١ـ حدد في المستوي P (الشكل ١٣٣) النقطة A ذات الاحداثيات الموضحة في الجدول أدناه :

9	8	7	6	5	4	3	2	1	
15	20	15	20	25	-15	-20	-15	15	Y
-20	25	20	-20	-15	-25	20	25	25	Z

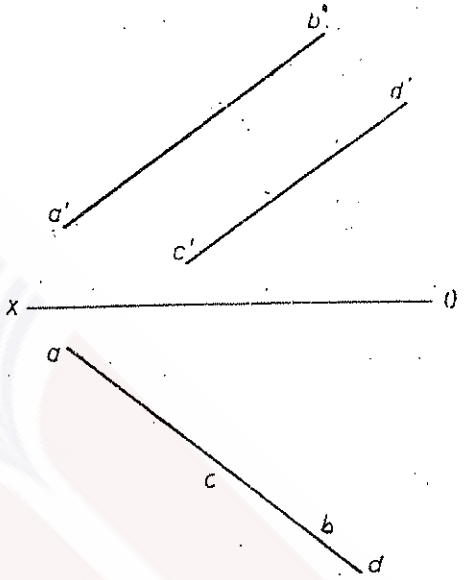


شكل رقم (١٣٣)

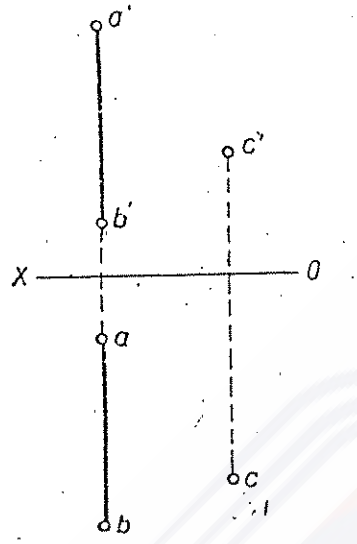


شكل رقم (١٣٢)

١١ـ استكمل مساقط النقاط الواقعة في المستوي P (الأشكال ١٣٤ ـ ١٣٦) في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي .



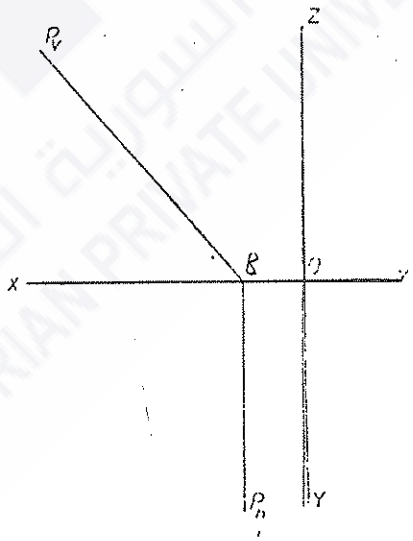
شكل رقم (١٢٨)



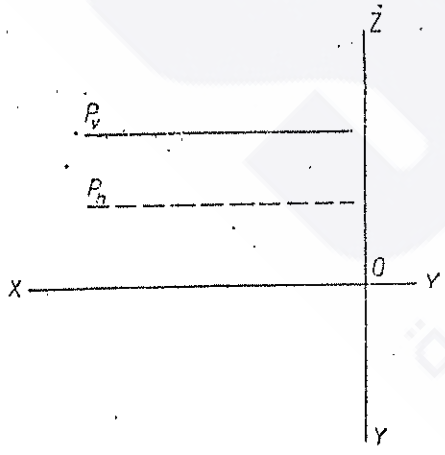
شكل رقم (١٢٩)

بمستقيمين متقاطعين أو متوازيين أو بمستقيم ونقطة (الأشكال ١٢٦ ـ ١٢٩) .

٨ـ ارسم الأثر الجانبي للمستوي P (الأشكال ١٣٠ ـ ١٣٢) .



شكل رقم (١٣٠)

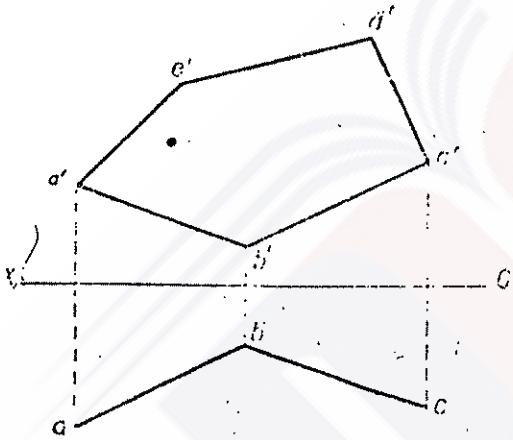


شكل رقم (١٣١)

٤ـ حدد المسقط الأفقي للمثلث KMN المنتمي للمستوي المحدد بالمستقيمين AB و CD (الشكل ١٢٣) .

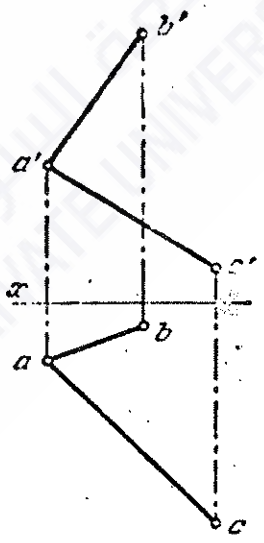
٥ـ هل تقع جميع النقاط الأربعة A و B و C و D في مستو واحد؟ (الشكل ١٢٤).

٦ـ استكمل المسقط الأفقي للمستوي خماسي الأضلاع ABCDE اذا علم مسقطه الأمامي a'b'c'd'e' والمسقط الأفقي لضلعيه المتجاورين AB و CD (الشكل ١٢٥) .

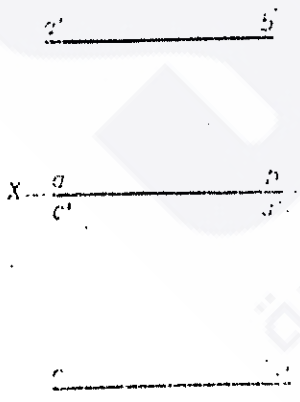


شكل رقم (١٢٥)

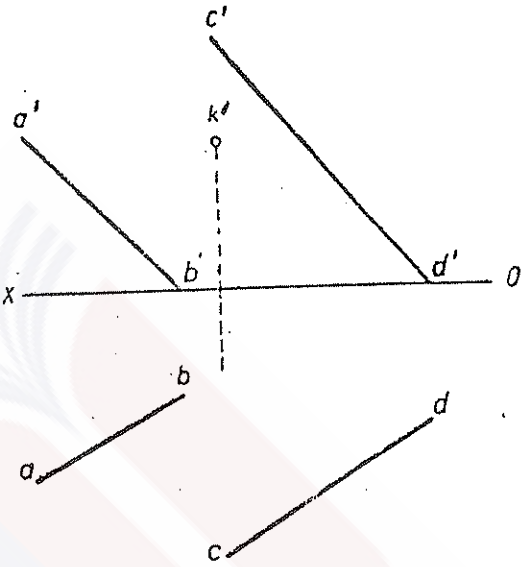
٧ـ حدد آثار المستوي P المحدد



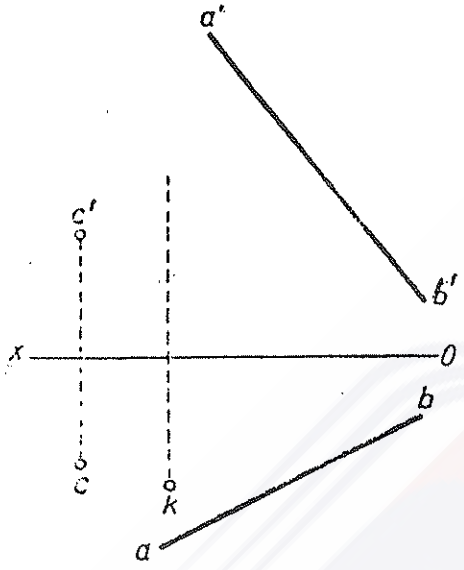
شكل رقم (١٢٦)



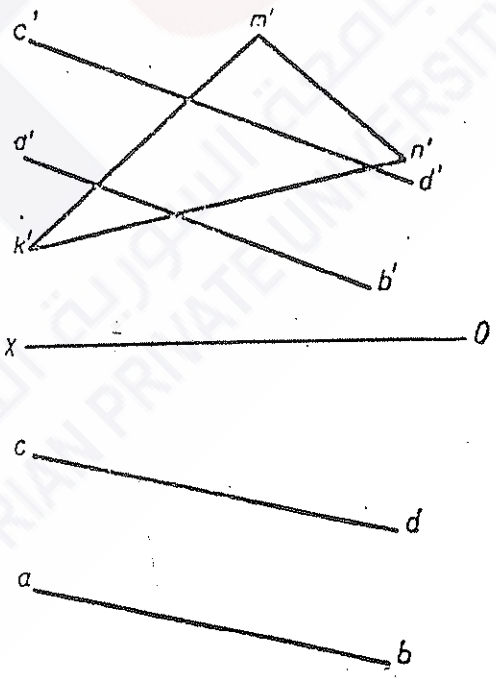
شكل رقم (١٢٧)



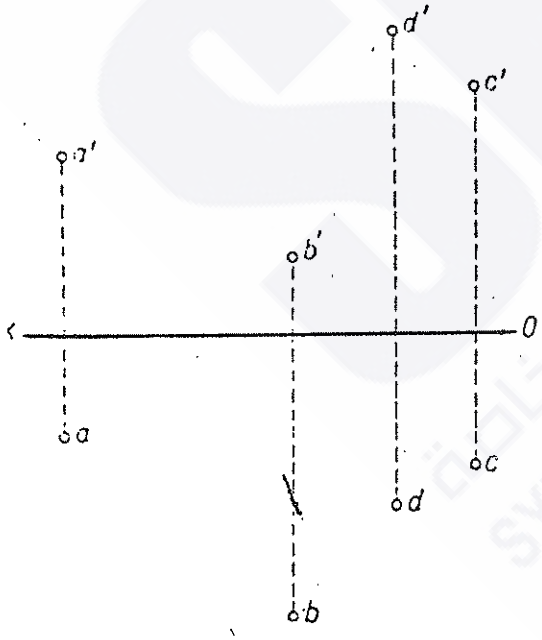
شكل رقم (١٢١)



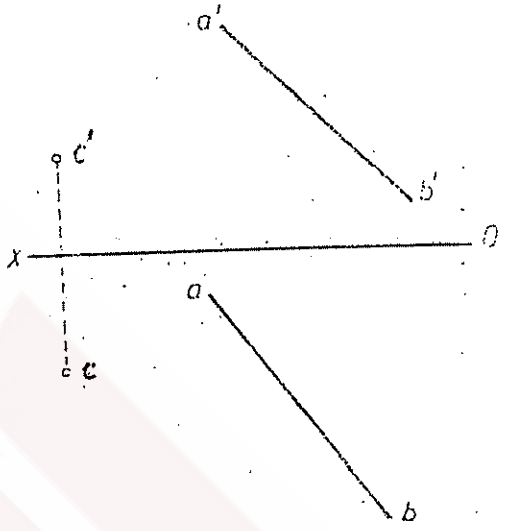
شكل رقم (١٢٢)



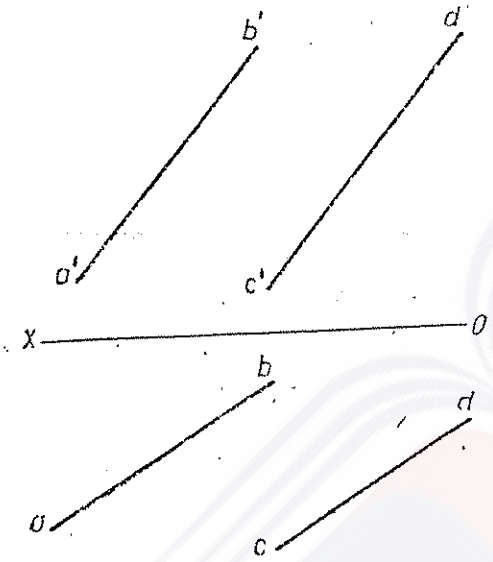
شكل رقم (١٢٣)



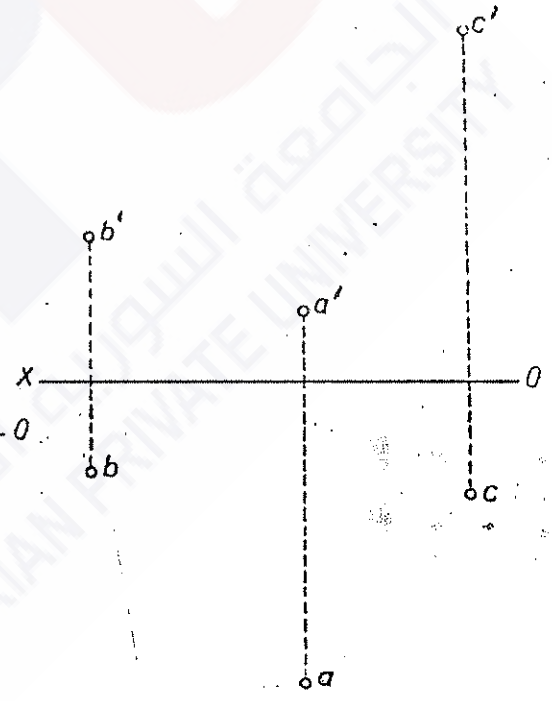
شكل رقم (١٢٤)



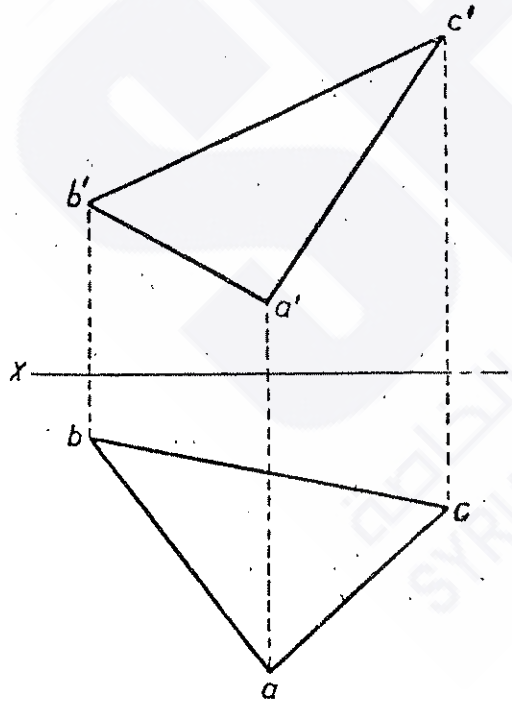
شكل رقم (١١٧)



شكل رقم (١١٨)

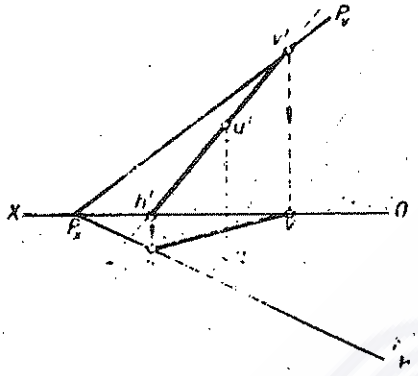


شكل رقم (١١٩)



شكل رقم (١٢٠)

الحـــــل :



شكل رقم (١١٦)

١ـ اذا كانت النقطة A تنتمي للمستوي فهي تقع على أحد مستقيماته . لذلك نمرر من a' مستقيما نفترضه المسقط الأفقي لمستقيم ينتمي الى المستوي P ، ونحدد h' و v' ومنه نحدد h على الأثر الأفقي P_v و v على خط الأرض . نصل hv فنحصل على المسقط الأفقي للمستقيم المنتمي للمستوي P . نلاحظ من الشكل (١١٦) أن a لاتقع على hv ولهذا فالنقطة A لاتنتمي للمستوي P لأنها لاتقع على أحد مستقيماته .

* **ملاحظة** : يمكننا استخدام المستقيمات الخاصة (أفق المستوي أو جبهته) لهذا التحقيق بنفس الطريقة السابقة وكما استخدمت في المثال السابق .

ثانيا ـ تمارين تطبيقية :

١ـ ارسم في المستوي المحدد بعناصره الهندسية (الأشكال ١١٧ ـ ١٢٠) . الموقع الهندسي للنقاط التي تبعد مسافة (١٥) ملم عن مستوي الاسقاط: آ ـ الأفقي H ، ب ـ الأمامي V .

٢ـ حدد المسقط الأفقي للنقطة K المنتمية للمستوي المحدد بالمستقيمين المتوازيين AB و CD (الشكل ١٢١) .

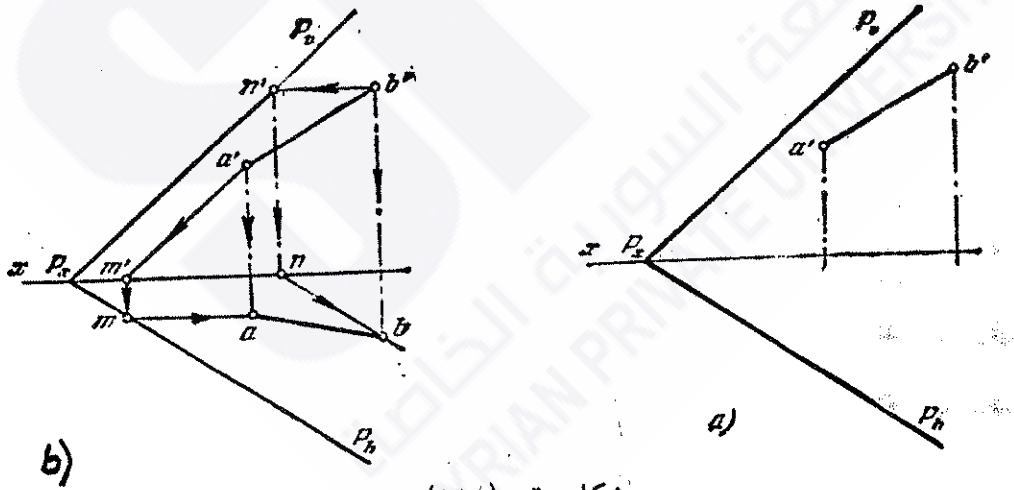
٣ـ حدد المسقط الأمامي للنقطة K المنتمية للمستوي المحدد بالمستقيم AB والنقطة C (الشكل ١٢٢) .

الحـــــل :

آ ـ تحديد المسقط الأفقي ab للمستقيم AB يعني تحديد المسقطين الأفقيين للنقطتين A و B المحددتين للمستقيم AB .

ب ـ تقع نقطة في مستو اذا وقعت على أحد مستقيماته ، لهذا يمكننا افتراض أن كل من النقطتين A و B تقع على مستقيم ينتمي للمستوي P وأن مساقط هذين المستقيمين معلومة (الشكل ١١٥ ب) .

ج ـ لذلك نمرر من B مستقيما أفقيا فنرسم من b' مستقيما يوازي خط الأرض فيقطع P_v في النقطة n' . نحدد مسقطها الأفقي n على خط الأرض ونرسم منه مستقيما يوازي P_h يتقاطع مع خط التداعي النازل من b' عموديا على خط الأرض في النقطة b المسقط الأفقي المطلوب للنقطة B .

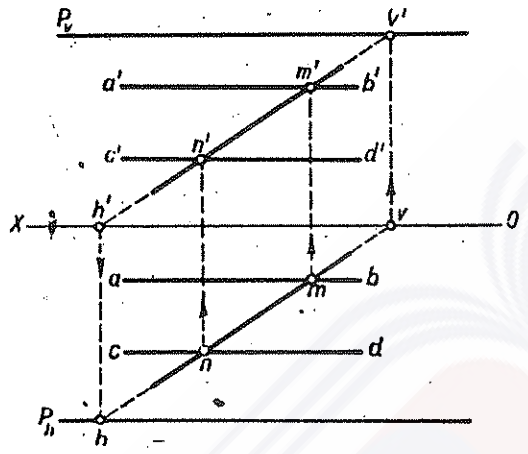


شكل رقم (١١٥)

هـ ـ نصل b و a فنحصل على ab المسقط الأفقي المطلوب للمستقيم AB .

١١ـ هل تنتمي النقطة A للمستوي P المحدد بأثريه (الشكل ١١٦) ؟

لتحقيق ذلك نمـــــرر مستقيما كيفيـــا mn يقطع المسقطين الأفقيين ab و cd في m و n على التوالي .



شكل رقم (١١٤)

ب ـ نحدد حسب قواعـــــد الاسقاط ، المسقطيـــن الأماميين m' و n' على a'b' و c'd' على التوالي ونصل بينهما فنحصـــل على المسقط الأمامي m'n' للمستقيم MN .

جـ ـ نحدد أثري المستقيم MN الأفقي (h',h) والأمامي (v,v') ونمرر من v' الأثر الأمامي P_v موازيا لخط الأرض ونمرر من h الأثر الأفـــقي P_h موازيا لخط الأرض . وهو المطلوب .

* **استنتاج مهم** : لتحديد آثار المستوي المحدد بمستقيمين متقاطعيـــن أو متوازيين نحدد آثار هذه المستقيمات ونمرر منها الآثار المماثلة للمستوي . واذا كان المستوي محدد بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة أو بمستقيم ونقطة خارجة عنه فيجب الانتقال أولا الى حالة تحديد المستوي بمستقيمين متوازيين أو متقاطعين عند البحث عن آثار المستوي .

١٠ـ ارسم المسقط الناقص للمستقيم AB المنتمي للمستوي P (الشكل ١١٥آ).

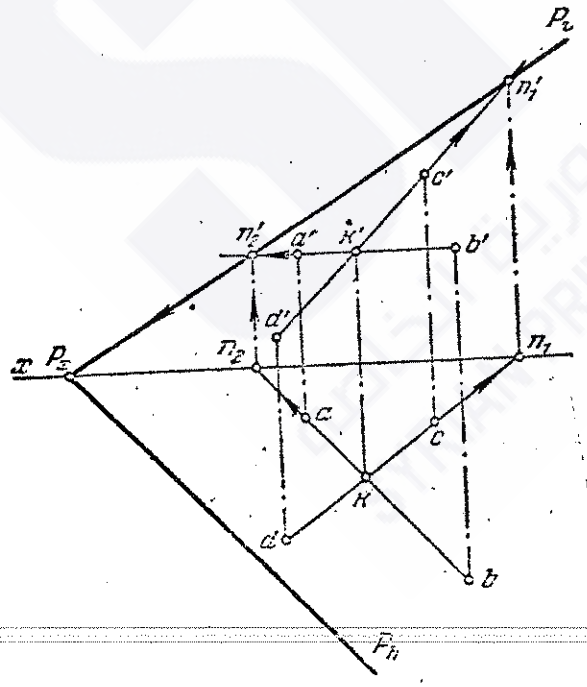
كما في المثال السابق ، نكتفي في هذا المثال بتحديد الأثرين الأماميين N_1 و N_2 للمستقيمين CD و AB على التوالي (الشكل ١١٢ ب) .

في التعبير الاسقاطي (الشكل ١١٣) نحدد ، وفق القواعد الواردة في الفصل الثاني من هذا الكتاب ، الأثرين الأماميين (n_1 , n_1') و (n_2 , n_2') للمستقيمين CD و AB ونمرر من n_1' و n_2' الأثر الأمامي P_v فيقطع خط الأرض في P_v فنرسم منها الأثر الأفقي P_h موازيا للمسقط الأفقي ab لأفق المستوي AB .

٩ـ ارسم أثري المستوي P المحدد بالمستقيمين المتوازيين AB و CD دون استخدام مستوي الاسقاط الجانبي W (الشكل ١١٤) .

الحل : يحدد المستقيمان AB و CD مستويا يوازي خط الأرض (هل تستطيع تعليل ذلك ؟) ويوازي أثراه P_h و P_v خط خط الأرض . لذا يكفينا تحديد نقطة واحدة لكل أثر لرسمه .

آ ـ المستقيمان AB و CD اسقاطيان جانبيان ولذلك ليس لهما آثار على V و H . لذلك نقطعهما بمستقيم كيفي MN يكون منتميا للمستوي أيضا .

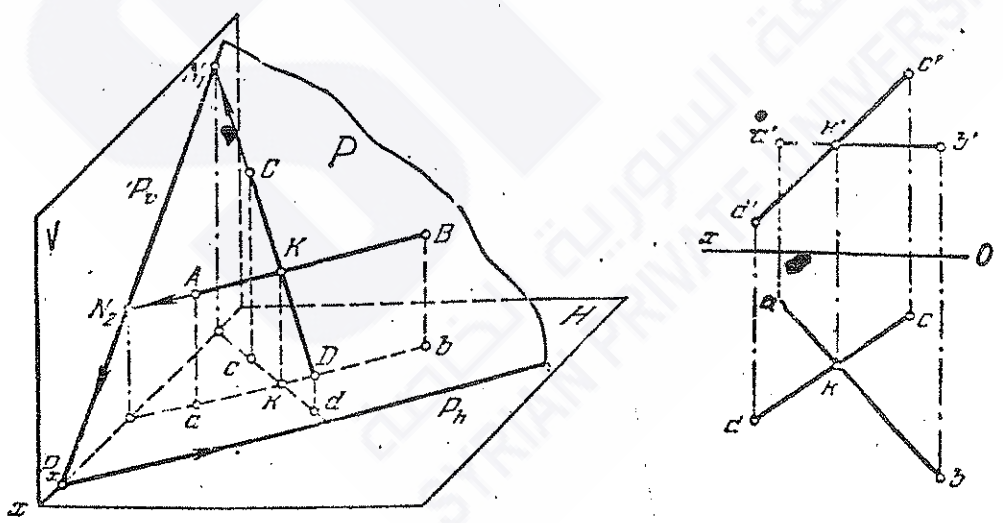


شكل رقم (١١٣)

المستوي المطلوب (الشكل ١١٠ ب) فالأثر الأمامي P_v للمستوي يمر من الأثرين الأماميين N_1 و N_2 للمستقيمين المتوازيين DC و AB على التوالي ، والأثر الأفقي P_h للمستوي يمر من الأثرين الأفقيين M_1 و M_2 لهذين المستقيمين . لذلك في التعبير الاسقاطي المستوي (الشكل ١١١) نحدد آثار المستقيمين بالطريقة ذاتها التي اتبعناها في الفصل الثاني من هذا الكتاب (المثال ٦ مثلا) .

٨ـ ارسم أثري المستوي P المحدد بالمستقيمين المتقاطعين AB و DC (الشكل ١١٢ آ) .

الحل : من معطيات السؤال (الشكل ١١٢ آ) نلاحظ أن المستقيم AB هو مستقيم أفقي (مسقطه الأمامي يوازي خط الأرض) . هذه الخصوصية تبسط لنا الحل كثيرا . فبدلا من ايجاد الآثار الأفقية والأمامية للمستقيمين AB و CD ،



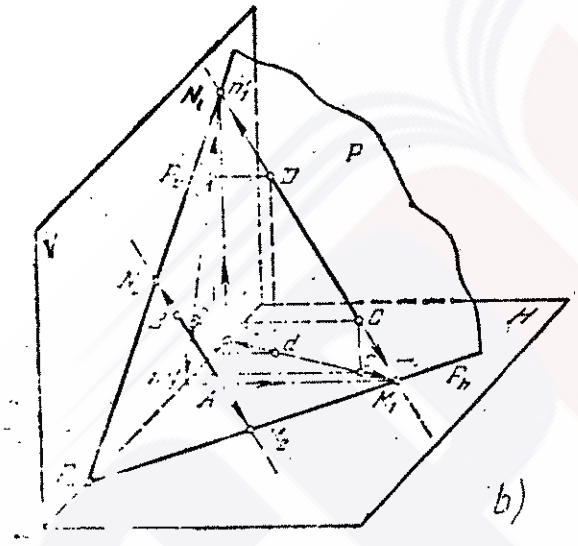
ب

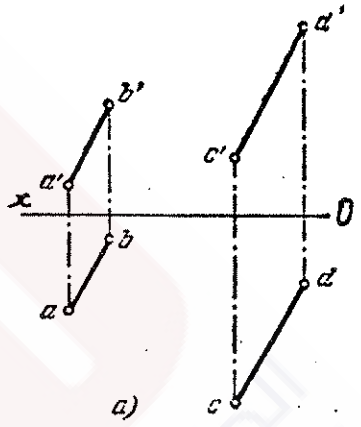
آ

شكل رقم (١١٢)

نفسه ، أي أنه مستقيم اسقاطي جانبي يعامد مستوي الاسقاط الجانبي W ، وهذا يعني أن مستوي المثلث ABC مستوي اسقاطي جانبي .

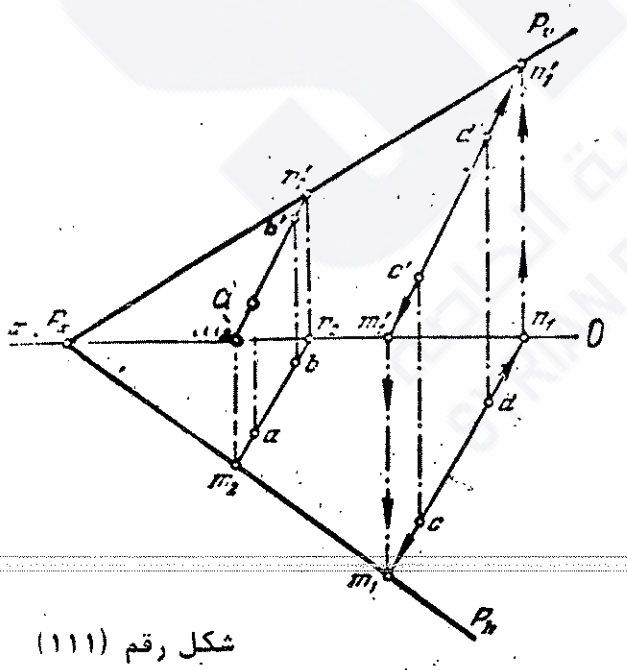
٧ـ ارسم أثري المستوي P المحدد بالمستقيمين المتوازيين A B و C D (الشكل ١١٠آ) .





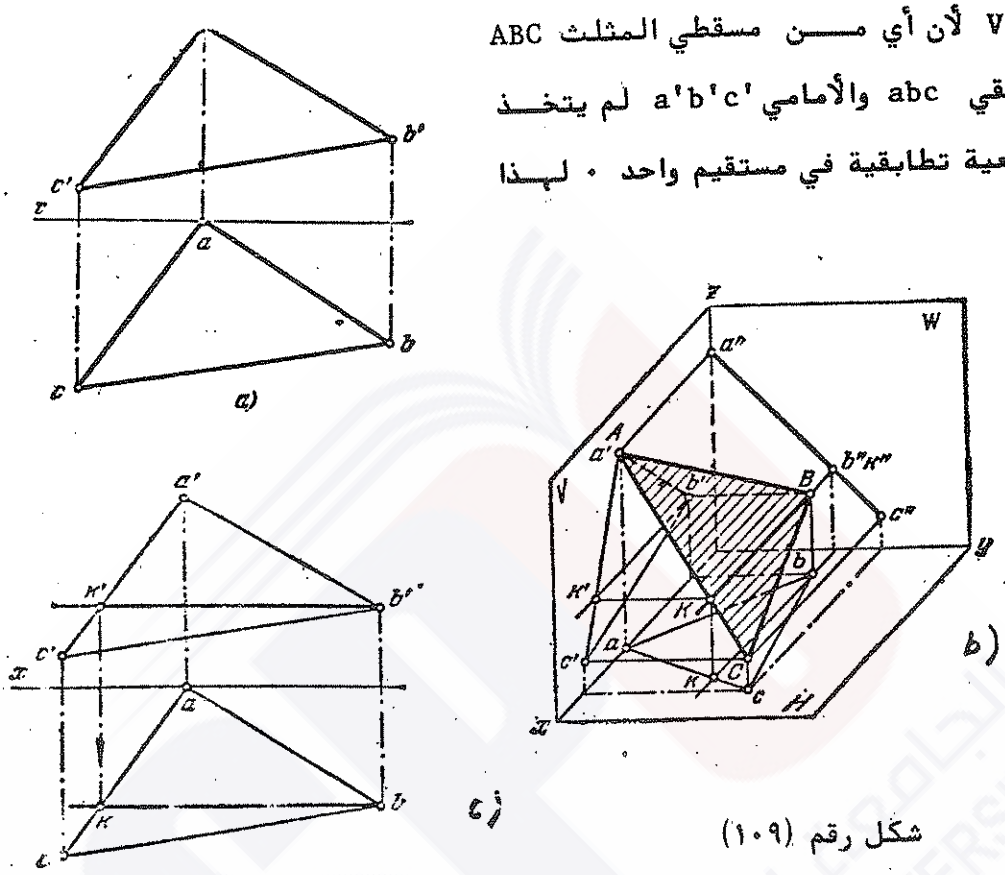
شكل رقم (١١٠)

الحل : تقع آثار المستقيم المنتمي لمستوي على آثار المستوي المماثلة . لذلك فان آثار المستقيمات المنتمية لمستو تكون نقاطا من نقاط آثار المستوي المماثلة . على هذا الأساس تحديد آثار المستقيمات المنتمية لمستو يحدد لنا نقط منتمية لآثار



شكل رقم (١١١)

و V لأن أي من مسقطي المثلث ABC الأفقي abc والأمامي a'b'c' لم يتخذ وضعية تطابقية في مستقيم واحد . لهذا



شكل رقم (١٠٩)

فان مستوي المثلث ABC يكون مستويا في حالته العامة أو مستويا اسقاطيا جانبيا (يعامد مستوي الاسقاط الجانبي W) ، فاذا كان مستويا اسقاطيا جانبيا فانه يمر من مستقيم يعامد مستوي الاسقاط الجانبي W (الشكل ١٠٩ ب)، ولهذا نحاول ايجاد مستقيم في المثلث ABC يعامد المستوي W . مثل هذا المستقيم يمكن أن يكون أفق المستوي KB (الشكل ١٠٩ جـ) الذي هو في الوقت ذاته جبهة المستوي . لرسم هذا المستقيم نمرر من النقطة b' مستقيما يوازي خط الأرض فيقطع a'c' في k' نحدد مسقطها الأفقي k على ac . نصل b و k فنحصل على المسقط الأفقي kb لأفق المستوي ونجد أنه يوازي خط الأرض أيضا ، وهذا يعني أن أفق المستوي هو جبهة المستوي في الوقت

ب ـ تقع النقطة في مستو اذا كانت واقعة على أحد مستقيماته . لذلك نحدد مسقطي مستقيم كيفي منتم للمستوي المعني MN(mn,m'n') بالطريقة ذاتها التي اتبعناها عند حل المثال الأول .

جـ ـ نحدد نقطة كيفية على mn (أو على m'n') ، ولتكن k (أو k') ونحدد مسقطها الثاني k' (أو k) وفق قواعد الاسقاط فنحصل على مسقطي النقطة المطلوبة M .

٥ـ حدد المسقط الأمامي k' للنقطة K المنتمية للمستوي المحدد بالمستقيمين المتقاطعين AB و CD ، اذا علم مسقطها الأفقي k .

الحـــل :

آ ـ نرسم معطيات السؤال في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي .

ب ـ تقع النقطة المنتمية للمستوي على أحد مستقيماته . لهذا نمرر من النقطة K مستقيما أماميا . وهذا يعني أن مسقطه الأفقي يكون مستقيما موازيا لخط الأرض ، ولذلك نمرر من النقطة k مستقيما يوازي خط الأرض فيقطع ab و cd في النقطتين e و f (الشكل ١٠٨).

جـ ـ نحدد المسقطين الأماميين e' و f' على a'b' و c'd' ونصل بينهما فنحصل على المسقط الأمامي لجبهة المستوي .

د ـ نقيم من k خط تداع يعامد خط الأرض فيقطع e'f' في النقطة k' المسقط الأمامي للنقطة K . وهو المطلوب .

٦ـ حدد وضع المستوي المحدد بالمثلث ABC بالنسبة لمستويات الاسقاط H و V و W (الشكل ١٠٩) .

الحـــل : كما نلاحظ من الشكل المستوي ABC لايعامد أي من المستويين H

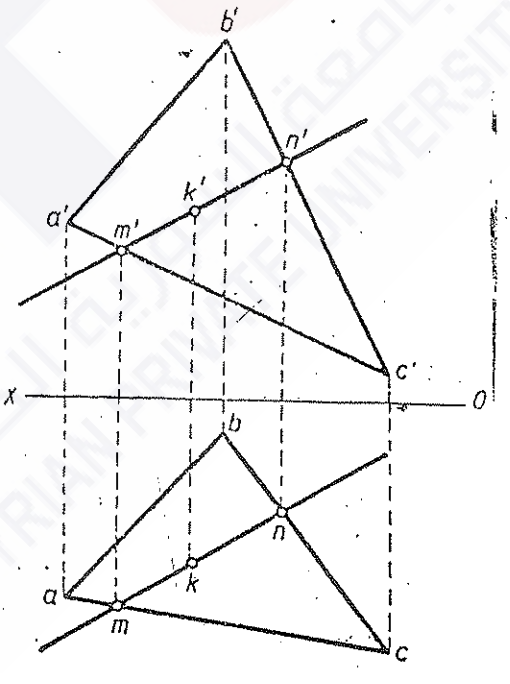
يصنعها تقاطع أفق المستوي مع خط الميل الأعظم زاوية قائمة كذلك . لهذا نقيم من النقطة e عمودا على المسقط الأفقي mn لأفق المستوي MN فيقطعه في النقطة k فنحصل على المسقط الأفقي لمستقيم الميل الأعظم .

هـ ـ نحدد المسقط الأمامي 'k ونصل 'k و 'e فنحصل على المسقط الأمامي 'e'k لمستقيم الميل الأعظم . وهو المطلوب .

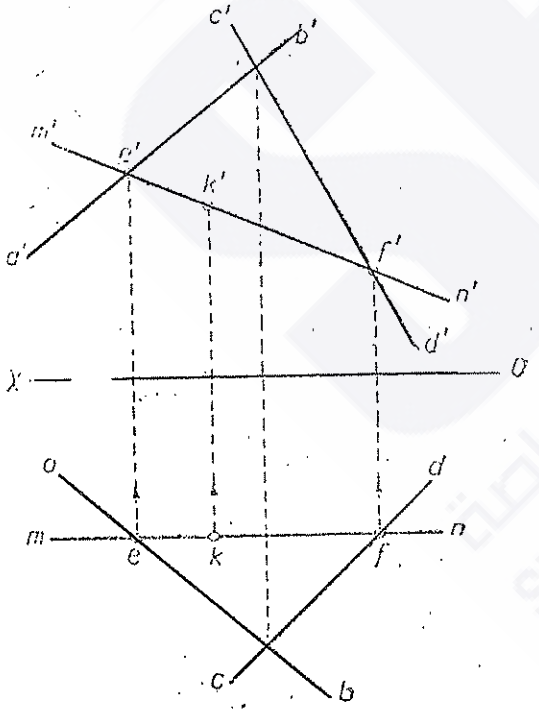
٤ـ حدد مسقطي النقطة الكيفية K المنتمية للمستوي المحدد بالمثلث ABC والتي لاتقع على أي من أضلاعه (الشكل ١٠٧) .

الحـــل :

آ ـ نرسم معطيات السؤال في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي .



شكل رقم (١٠٧)



شكل رقم (١٠٨)

في 'e . هذا المستقيم يمثل المسقط الأمامي للمستقيم المطلوب.

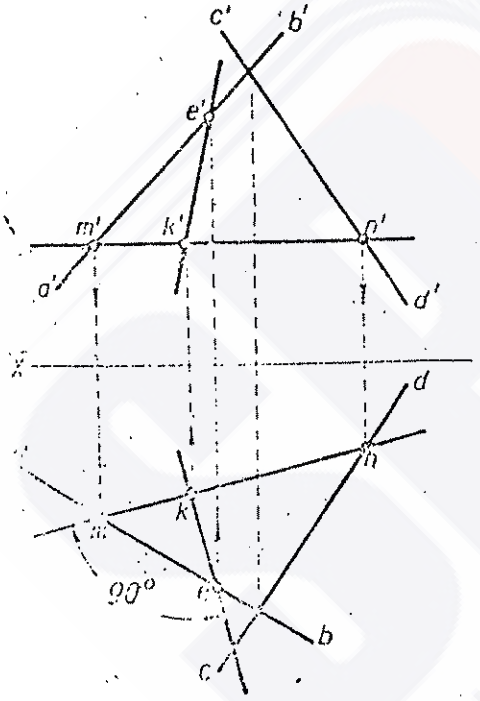
د ـ نحدد ، حسب قواعد الاسقاط العامة ، المسقطين الأفقيين d و e لنقطتي تقاطع المستقيم الأفقي مع المستقيمين AB و CD ونمرر منهما مستقيما فنحصل على المسقط الأفقي mn للمستقيم المطلوب .

٣ـ ارسم في المستوي المحدد بالمستقيمين المتقاطعين AB و CD مستقيم الميل الأعظم (الشكل ١٠٦) .

الحـــــل :

آ ـ نرسم معطيات السؤال في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي .

ب ـ مستقيم الميل الأعظم يعامد أفق المستوي ، لهذا يتوجب علينا أولا رسم أفق المستوي (مستقيم أفقي ينتمي للمستوي المعني) . لذلك نرسم أفق المستوي MN بالطريقة نفسها التي اتبعناها في المثال السابق .



شكل رقم (١٠٦)

جـ ـ نختار نقطة كيفية E على المستقيم AB (أو CD) . لأجل ذلك نأخذ نقطة كيفية e على المسقط الأفقي ab (أو cd) فتمثل المسقط الأفقي للنقطة المختارة F ونحدد مسقطها الأمامي 'e على 'a'b (أو 'c'd) وفق قواعد الاسقاط العامة .

د ـ حسب قواعد اسقاط الزاوية القائمة ، يكون المسقط الأفقي للزاوية التي

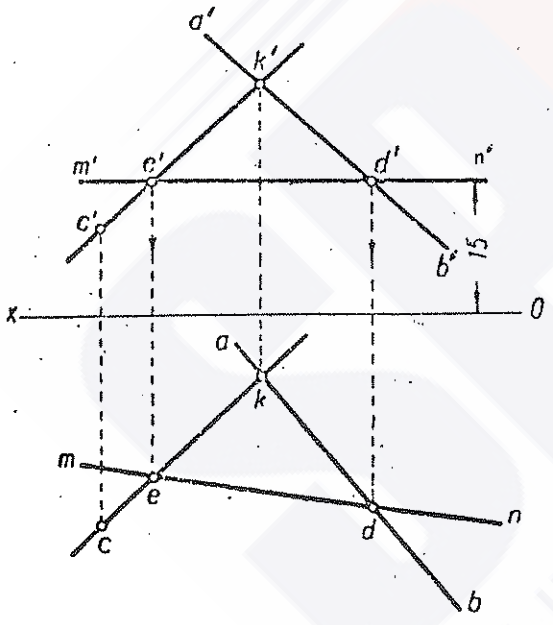
جـ ـ نحدد وفق قواعد الاسقاط العامة المسقطين الأماميين k' و $\overline{\ell'}$ ونصل k'ℓ' ونمده حتى يتقاطع مع خطي التداعي المقامين من النقطتين m و n والعموديين على خط الأرض (OX) فنحصل على المسقط الأمامي m'n' المطلوب للمستقيم MN . وهو المطلوب .

٢ـ ارسم مستقيما أفقيا في المستوي المحدد بالمستقيم AB والنقطة C يبعد مسافة (١٥) ملم عن مستوي الاسقاط الأفقي H .

الحل :

آ ـ نرسم معطيات السؤال في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي .

ب ـ نمرر من النقطة C(c,c') مستقيم يقطع المستقيم AB(ab,a'b') في النقطة K(k,k') وبذلك يصبح المستوي المعني محددا بمستقيمين متقاطعين (الشكل ١٠٥) .



شكل رقم (١٠٥)

جـ ـ ينتمي المستقيم لمستو اذا وقعت نقطتان منه في هذا المستوي . من جهة أخرى ، المسقط الأمامي للمستقيم الأفقي يوازي خط الأرض والمسافة بينهما تمثل بعد المستقيم الفراغي عن مستوي الاسقاط الأفقي H . لذلك نرسم على بعد (١٥) ملم فوق خط الأرض مستقيما يوازي (OX) m'n' فيقطع a'b' في d' و c'k'